Analyse de Fourier

Yann Chaubet

7 mai 2025

Sommaire

Notations **3**

Introduction **5**

1 Rappels d'analyse complexe **7**
1.1 Fonctions holomorphes . . . 7
1.2 Résidus . . . 8
1.3 Holomorphie à paramètres . . . 11

2 Transformation de Fourier **15**
2.1 Transformation de Fourier sur $L^1(\mathbb{R}^n)$ . . . 16
2.2 Formule d'inversion . . . 25
2.3 Transformation de Fourier sur $L^2(\mathbb{R}^n)$ . . . 29

3 Quelques applications **35**
3.1 Formule sommatoire de Poisson . . . 35
3.2 Le théorème de Shannon . . . 38
3.3 La fonction zêta de Riemann . . . 39

4 Distributions tempérées **47**
4.1 Fonctions lisses à décroissance rapide . . . 48
4.2 Distributions tempérées . . . 51
4.3 Exemples . . . 54
4.4 Opérations sur les distributions tempérées . . . 57

5 Équations d'évolution **71**
5.1 Fonctions lisses à valeurs distributions . . . 72
5.2 Équation de la chaleur . . . 73
5.3 Équation de Schrödinger . . . 76
5.4 Équation des ondes . . . 80
5.5 Espaces de Sobolev . . . 82
5.6 Équations d'évolutions sur les espaces de Sobolev . . . 84

Notations

Dans tout ce qui suit, n est un entier supérieur ou égal à 1. Si $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et $y = (y_1, \ldots, y_n)$ sont des éléments de $\mathbb{R}^n$, on note

$$x \cdot y = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$$

le produit scalaire euclidien de x avec y. On note aussi

$$|x| = (x \cdot x)^{1/2} = \left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2 \right)^{1/2}$$

la norme associée. Pour tout multi-indice $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, on définit sa norme 1 par

$$|\alpha|_1 = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n.$$

On notera aussi

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \alpha \in \mathbb{N}^n.$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathscr{C}^k(\mathbb{R}^n)$ désigne l'espace des fonctions $\mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ de classe $\mathscr{C}^k$, tandis que

$$\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n) = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \mathscr{C}^k(\mathbb{R}^n)$$

est l'espace des fonctions lisses, c'est-à-dire de classe $\mathscr{C}^\infty$. L'espace $\mathscr{C}_c(\mathbb{R}^n)$ (resp. $\mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\mathscr{C}_c^k(\mathbb{R}^n)$) est celui des fonctions de $\mathscr{C}(\mathbb{R}^n)$ (resp. $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\mathscr{C}^k(\mathbb{R}^n)$) qui sont à support compact. Si $j = 1, \ldots, n$, $k \in \mathbb{N}$ et $\varphi \in \mathscr{C}^k(\mathbb{R}^n)$, on note

$$\partial_{x_j}^k \varphi = \frac{\partial^k \varphi}{\partial {x_j}^k}$$

et plus généralement si $\varphi \in \mathscr{C}^k$ et $\alpha \in \mathbb{N}^n$ avec $|\alpha|_1 = k$,

$$\partial^\alpha \varphi = \frac{\partial^k \varphi}{\partial {x_1}^{\alpha_1} \cdots \partial {x_n}^{\alpha_n}} = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \cdots \partial_{x_n}^{\alpha_n} \varphi.$$

L'espace $\mathscr{C}_b^k(\mathbb{R}^n)$ est l'espace des fonctions de classe $\mathscr{C}^k$ dont toutes les dérivées d'ordre $\leqslant k$ sont bornées, c'est-à-dire

$$\mathscr{C}_b^k(\mathbb{R}^n) = \left\{\varphi \in \mathscr{C}^k(\mathbb{R}^n) \ : \ \|\partial^\alpha\|_\infty < \infty, \ \alpha \in \mathbb{N}^n, \ |\alpha|_1 \leqslant k\right\}.$$

Ici on a noté, pour toute $\varphi \in \mathscr{C}(\mathbb{R}^n)$,

$$\|\varphi\|_\infty = \sup_{\mathbb{R}^n} |\varphi|.$$

On note encore $\mathscr{C}_b^\infty(\mathbb{R}^n) = \bigcap_k \mathscr{C}_b^k(\mathbb{R}^n)$ et $\mathscr{C}_b(\mathbb{R}^n) = \mathscr{C}_b^0(\mathbb{R}^n)$. Pour tout $p \in [1, \infty]$ on notera $L^p(\mathbb{R}^n)$ l'espace de Lebesgue d'exposant p, et on note $\|\cdot\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$ la norme associée. Si $p = 2$, cette norme est issue du produit scalaire

$$\langle f, g\rangle_{L^2} = \int f(x)\overline{g(x)}\,\mathrm{d}x, \quad f, g \in L^2(\mathbb{R}^n).$$

Introduction

Ces notes sont celles d'un cours d'analyse de Fourier dispensé à Nantes Université pendant la période 2023–2026. Ces notes sont organisées comme suit. Au chapitre 1, on rappelle quelques résultats d'analyse complexe qui seront utiles dans la suite. Au chapitre 2 on introduit la transformation de Fourier sur L^1, puis on montre la formule d'inversion et on étend la transformation de Fourier à L^2. On énonce quelques applications au chapitre 3 ; on montre notamment que les zéros non triviaux de la fonction zêta de Riemann ont une partie réelle strictement comprise entre 0 et 1. On aborde la théorie des distributions au chapitre 4. Enfin au chapitre 5 on résout dans l'espace des distributions certaines équations d'évolution provenant de la physique (équation de la chaleur, équation de Schrödinger, équation des ondes).

Chapitre 1

Rappels d'analyse complexe

Dans ce chapitre, nous énonçons quelques résultats classiques concernant les fonctions holomorphes qui nous seront utiles dans la suite. Nous renvoyons aux références [5, 3] pour les démonstrations de ces résultats.

Sommaire

1.1 Fonctions holomorphes 7
1.2 Résidus 8
1.2.1 Fonctions méromorphes 8
1.2.2 Théorème des résidus 9
1.3 Holomorphie à paramètres 11
1.3.1 Holomorphie sous le signe intégral 11
1.3.2 Théorème de Montel 12

1.1 Fonctions holomorphes

Définition 1.1.1. Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Une fonction $f : U \to \mathbb{C}$ est dite *holomorphe* sur U si elle est dérivable au sens complexe en tout point de U ; cela signifie que pour tout $z \in U$, il existe un nombre complexe $a \in \mathbb{C}$ tel que

$$f(z+h) = f(z) + ah + o(h)$$

quand $h \to 0$. On note alors $f'(z) = a$.

Une propriété fondamentale des fonctions holomorphes est qu'elles sont infiniment différentiables, et même analytiques.

Théorème 1.1.2. *Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Alors f est analytique ; pour tout $\zeta \in U$ et tout $r > 0$ tels que $B(\zeta, r) \subset U$ on peut écrire*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-\zeta)^n, \quad |z-\zeta| < r,$$

où la série entière $\sum a_n h^n$ a un rayon de convergence supérieur ou égal à r.

Les coefficients a_n sont donnés par la formule intégrale de Cauchy,

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-\zeta|=\rho} \frac{f(z)\mathrm{d}z}{(z-\zeta)^{n+1}}.$$

En particuler f est infiniment différentiable (au sens complexe), et on a

$$\frac{f^{(n)}(\zeta)}{n!} = a_n.$$

La propriété suivante est cruciale et nous dit que l'ensemble des zéros d'une fonction holomorphe non nulle forme un ensemble discret.

Théorème 1.1.3 (Principe de prolongement unique). *Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert et $f, g : U \to \mathbb{C}$ deux fonctions holomorphes. Supposons que l'ensemble*

$$\{z \in U \ : \ f(z) = g(z)\}$$

possède un point d'accumulation dans U. Alors $f = g$.

1.2 Résidus

1.2.1 Fonctions méromorphes

Définition 1.2.1. Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Une fonction *méromorphe* sur U est la donnée d'un ensemble discret $Z \subset U$ et d'une fonction holomorphe $f : U \setminus Z \to \mathbb{C}$ telle que, pour tout $\zeta \in Z$, on a un développement

$$f(z) = g(z) + \sum_{j=1}^{J} \frac{b_j}{(z-\zeta)^j}, \quad z \to \zeta, \tag{1.1}$$

où $g(z)$ est holomorphe au voisinage de $z = \zeta$. Le coefficient b_1 dans le développement (1.1) est appelé *résidu* de f au point ζ et est noté $\mathrm{res}_\zeta f$.

Définition 1.2.2. Si $f : U \to \mathbb{C}$ est méromorphe, non nulle et $\zeta \in U$, on appelle *ordre de f au point ζ*, l'unique entier $n = n(f, \zeta) \in \mathbb{Z}$ tel que $f(s)(z-\zeta)^{-n}$ est holomorphe et ne s'annule pas près de $z = \zeta$.

EXEMPLE 1.2.3. Si f a un pôle au point $z = \zeta$ et qu'on a le développement (1.1), alors $n(f, \zeta) = -J$. Si f s'annule à l'ordre J au point $z = \zeta$ alors $n(f, \zeta) = J$. Si $f(\zeta) \neq 0$ alors $n(f, \zeta) = 0$.

Le résultat suivant nous dit qu'on peut retrouver l'ordre d'une fonction méromorphe f au point ζ comme le résidu de sa dérivée logarithmique au point ζ.

PROPOSITION 1.2.4. *Soit f méromorphe au voisinage de $\zeta \in \mathbb{C}$, d'ordre non nul $n(f, \zeta) \neq 0$ au point $z = \zeta$. Alors*

$$\operatorname{res}_\zeta \frac{f'}{f} = n(f, \zeta).$$

Démonstration. On écrit $f(z) = (z - \zeta)^{n(f,\zeta)} g(z)$ avec g holomorphe près de $z = \zeta$ et $g(\zeta) \neq 0$. On a alors

$$f'(z) = n(f, \zeta)(z - \eta)^{n(f,\zeta)-1} g(z) + (z - \zeta)^{n(f,\zeta)} g'(z)$$

d'où l'on tire

$$\frac{f'}{f}(z) = \frac{n(f, \zeta)}{z - \zeta} + \frac{g'}{g}(z).$$

Puisque $g(\zeta) \neq 0$ on obtient bien $\operatorname{res}_\zeta \dfrac{f'}{f} = n(f, \zeta)$. □

1.2.2 Théorème des résidus

THÉORÈME 1.2.5 (Résidus). *Soit $U \subset \mathbb{C}$ ouvert et f une fonction méromorphe sur U. Soit $\Gamma : [0, 1] \to U$ une courbe fermée simple, de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux, orientée dans le sens anti-horaire, délimitant une région compacte Ω dont le bord ne contient aucun pôle de f. Alors*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma f(z) \mathrm{d}z = \sum_{\zeta \in \Omega} \operatorname{res}_\zeta f.$$

EXEMPLE 1.2.6. (i) On utilise le théorème des résidus pour montrer

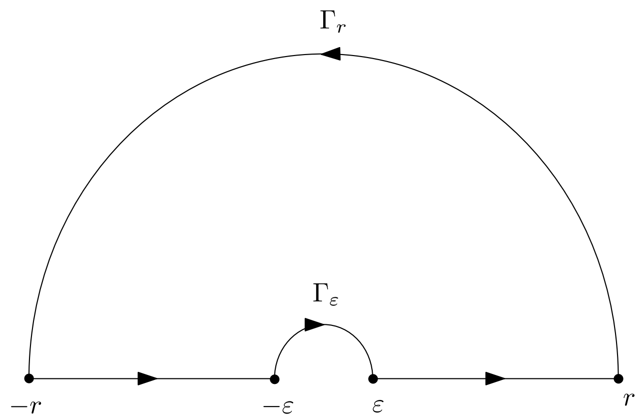
$$\int_0^\infty \frac{\sin(t)}{t} \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}.$$

Soient $0 < \varepsilon < r < \infty$; on considère le contour d'intégration Γ donné par la figure 1.2.1 ci-dessous.

Notons que

$$2i \int_\varepsilon^r \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t = \int_\varepsilon^r \frac{e^{it} - e^{-it}}{t} \mathrm{d}t = \int_{-r}^{-\varepsilon} \frac{e^{it}}{t} \mathrm{d}t + \int_\varepsilon^r \frac{e^{it}}{t} \mathrm{d}t.$$

FIGURE 1.2.1 – Le contour Γ



Puisque $z \mapsto e^{iz}/z$ est holomorphe sur le domaine délimité par Γ, le théorème des résidus nous donne $0 = \int_\Gamma \frac{e^{iz}}{z}\mathrm{d}z$ ce qui implique

$$2i \int_\varepsilon^r \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t = -\int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{e^{iz}}{z}\mathrm{d}z - \int_{\Gamma_r} \frac{e^{iz}}{z}\mathrm{d}z.$$

Notons qu'on a, d'une part,

$$\left|\int_{\Gamma_r} \frac{e^{iz}}{z}\mathrm{d}z\right| = \left|\int_0^\pi \frac{e^{ire^\theta}}{re^{i\theta}} r\mathrm{d}\theta\right| \leqslant \int_0^r e^{-r\sin\theta}\mathrm{d}\theta \underset{r\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

où on a utilisé le théorème de convergence dominée. D'autre part,

$$\int_{\Gamma_\varepsilon} e^{iz} z\mathrm{d}z = -i\int_0^\pi e^{i\varepsilon e^{i\theta}}\mathrm{d}\theta = -i\pi - i\int_0^\pi \left(e^{i\varepsilon e^{i\theta}} - 1\right)\mathrm{d}\theta \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} -i\pi.$$

On obtient donc

$$2i\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t = 2i \lim_{r\to\infty}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^r \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t = i\pi,$$

et la formule annoncée est démontrée.

(ii) On calcule ici $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2}$. Considérons la fonction $g : \mathbb{C}\setminus\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ définie par

$$g(z) = \pi z^{-2}\cot \pi z = \frac{\pi\cos\pi z}{z^2\sin\pi z}, \quad z \notin \mathbb{Z}.$$

La fonction g est méromorphe sur $\mathbb{C}$ et l'ensemble de ses pôles est $\mathbb{Z}$.

Pour $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ on a

$$\sin \pi z = \sin(n\pi + (z-n)\pi) = \cos(n\pi)(z-n)\pi + \mathcal{O}(z-n)^2$$

d'où l'on tire $g(z) \sim n^{-2}(z-n)^{-1}$ quand $z \to n$, d'où $\operatorname{res}_n g = n^{-2}$.
Au voisinage de $z=0$, on a

$$\cot \pi z = \frac{1-(\pi z)^2/2 + \mathcal{O}(z^4)}{\pi z\,(1-(\pi z)^2/6+\mathcal{O}(z^4))} = \frac{1}{\pi z}\left(1 - \frac{(\pi z)^2}{2} + \mathcal{O}(z^3)\right).$$

Il suit que $g(z) = z^{-3} - \pi^2 z^{-1}/3 + \mathcal{O}(1)$ et donc $\operatorname{res}_0 g = -\pi^2/3$.
En intégrant sur le contour $\Gamma_N = \partial C_N$ délimitant le carré

$$C_N = \left[-N-\frac{1}{2}, N+\frac{1}{2}\right]^2 \subset \mathbb{C},$$

on obtient donc par la formule des résidus

$$\int_{\Gamma_N} g(z)\mathrm{d}z = -\pi^2/3 + 2\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2}. \tag{1.2}$$

Notons que $z \mapsto \cot \pi z$ est bornée sur Γ_N de sorte qu'il existe $C>0$ telle que $\sup_{\Gamma_N} |g| \leqslant CN^{-2}$ pour tout $N>0$. Par suite

$$\int_{\Gamma_N} g(z)\mathrm{d}z \leqslant CN^{-2}\,\text{longueur}(\Gamma_N) = 4CN^{-2}(N+1/2) \longrightarrow 0$$

quand $N \to \infty$. En prenant la limite dans (1.2) on obtient finalement

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

1.3 Holomorphie à paramètres

On conclut ce chapitre de rappel par deux résultats utiles.

1.3.1 Holomorphie sous le signe intégral

Théorème 1.3.1. *Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Soit f une fonction $I \times U \to \mathbb{C}$ satisfaisant*

(i) *pour tout $t \in I$, l'application $z \mapsto f(t,z)$ est holomorphe sur U ;*

(ii) *il existe* $G : I \to \mathbb{R}_+$ *intégrable telle que* $|f(t,z)| \leqslant G(t)$ *pour tous* $t \in I$ *et* $z \in U$.

Alors l'application $F : z \mapsto \int_I f(t,z)\mathrm{d}t$ *est holomorphe sur* U *et on a*

$$F'(z) = \int_I \partial_z f(t,z)\mathrm{d}t, \quad z \in U.$$

Exemple 1.3.2. (i) La fonction Γ définie par

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}\mathrm{d}t, \quad \operatorname{Re} z > 0,$$

est holomorphe sur $\{z \in \mathbb{C} \ : \ \operatorname{Re} z > 0\}$.

(ii) Pour tout $\alpha > 0$ la fonction G_α définie par

$$G_\alpha(z) = \int_{\mathbb{R}} e^{-izt}e^{-\alpha t^2}\mathrm{d}t, \quad z \in \mathbb{C},$$

est holomorphe sur $\mathbb{C}$. On peut en déduire que

$$G_\alpha(z) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}e^{-z^2/4\alpha}, \quad z \in \mathbb{C}. \tag{1.3}$$

En effet, si $z = i\lambda$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$G_\alpha(i\lambda) = \int_{\mathbb{R}} e^{\lambda t}e^{-\alpha t^2}\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} e^{\lambda t/\sqrt{\alpha}}e^{-t^2}\mathrm{d}t = \alpha^{-1/2}e^{\lambda^2/4\alpha}\int_{\mathbb{R}} e^{-\left(t-\lambda/2\sqrt{\alpha}\right)^2}\mathrm{d}t.$$

Cette dernière intégrale vaut $\sqrt{\pi/\alpha}\,e^{-(i\lambda)^2/4\alpha}$. Ainsi (1.3) est vérifiée pour tout $z \in i\mathbb{R}$. Par principe de prolongement unique (cf. le théorème 1.1.3), cette formule est valide pour tout $z \in \mathbb{C}$.

1.3.2 Théorème de Montel

On a le pendant discret du théorème 1.3.3.

Théorème 1.3.3 (Montel). *Soit* $U \subset \mathbb{C}$ *un ouvert et* (f_n) *une suite de fonctions holomorphes sur* U *qui converge localement uniformément vers* $f : U \to \mathbb{C}$. *Alors la fonction* f *est holomorphe sur* U *et la suite* (f_n') *converge localement uniformément vers* f'.

Remarque 1.3.4. En particulier, si (f_n) est une suite de fonctions holomorphes sur U telle que la série de fonctions $\sum_n f_n$ converge localement uniformément, alors la fonction somme $f = \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ est holomorphe sur U.

Exemple 1.3.5. La fonction ζ de Riemann définie par

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \quad \operatorname{Re} s > 1,$$

est holomorphe sur $\{s \in \mathbb{C} \ : \ \operatorname{Re} s > 1\}$. En effet, pour tout $\sigma > 1$ on a

$$\left|n^{-s}\right| = n^{-\operatorname{Re} s} \leqslant n^{-\sigma}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad \operatorname{Re} s \geqslant \sigma.$$

En particulier la série de fonctions $\sum_n f_n$, où $f_n(s) = n^{-s}$, converge normalement, et donc uniformément, sur $\{s \in \mathbb{C} \ : \ \operatorname{Re} s \geqslant \sigma\}$. Par la remarque précédente on en déduit que ζ est holomorphe sur $\{s \in \mathbb{C} \ : \ \operatorname{Re} s > \sigma\}$ pour tout $\sigma > 1$, donc sur $\mathbb{C}_{>1} = \{s \in \mathbb{C} \ : \ \operatorname{Re} s > 1\}$.

Chapitre 2

Transformation de Fourier

Dans ce chapitre, nous définissons la transformation de Fourier sur $L^1(\mathbb{R}^n)$ et nous énonçons quelques propriétés de celle-ci. Nous démontrons la formule d'inversion et étendons la transformation de Fourier en une quasi-isométrie de $L^2(\mathbb{R}^n)$. Des bonnes références pour ce chapitre sont [1, 4, 6].

Sommaire

2.1 Transformation de Fourier sur $L^1(\mathbb{R}^n)$ 16
- 2.1.1 Définition de la transformée de Fourier 16
- 2.1.2 Exemples de calculs de transformées de Fourier 16
- 2.1.3 Produit de convolution sur $L^1(\mathbb{R}^n) \times L^\infty(\mathbb{R}^n)$ 19
- 2.1.4 Approximation de l'identité 20
- 2.1.5 Propriétés de la transformée de Fourier 22
- 2.1.6 Lemme de Riemann–Lebesgue 24

2.2 Formule d'inversion 25
- 2.2.1 Transformée de Fourier d'une gaussienne 25
- 2.2.2 Formule d'inversion de Fourier 27

2.3 Transformation de Fourier sur $L^2(\mathbb{R}^n)$ 29
- 2.3.1 Extension à $L^2(\mathbb{R}^n)$ 29
- 2.3.2 Principe d'incertitude de Heiseinberg 32

2.1 Transformation de Fourier sur $L^1(\mathbb{R}^n)$

2.1.1 Définition de la transformée de Fourier

Définition 2.1.1. Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. La *transformée de Fourier* de f, notée $\hat{f}$, est l'élément de $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ défini par

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-ix\cdot\xi} \mathrm{d}x, \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Remarque 2.1.2. Pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$ on a $\left|f(x)e^{-ix\cdot\xi}\right| \leqslant |f(x)|$. Ainsi le théorème de continuité sous le signe intégral implique que $\widehat{f} \in \mathscr{C}(\mathbb{R}^n)$ pour toute fonction $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

Définition 2.1.3. L'opérateur

$$\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{C}(\mathbb{R}^n), \quad f \mapsto \widehat{f}$$

est appelé *transformation de Fourier*.

L'intuition derrière la transformée de Fourier est que le nombre $\widehat{f}(\xi)$ est le produit scalaire L^2 entre f et l'onde plane e_ξ qui oscille dans la direction $\xi \in \mathbb{R}^n$, qui est définie par

$$e_\xi(x) = \exp ix \cdot \xi, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

En effet, on a

$$\langle f, e_\xi \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\overline{e_\xi(x)}\, \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-ix\cdot\xi} \mathrm{d}x = \widehat{f}(\xi).$$

Si ce produit scalaire est élevé, cela signifie moralement que f oscille beaucoup dans la direction ξ.

2.1.2 Exemples de calculs de transformées de Fourier

Avant de présenter les propriétés de la transformée de Fourier, voyons quelques exemples de calculs.

Exemple 2.1.4. Soit $f(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$. On veut calculer

$$\widehat{f}(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-i\lambda t} \mathrm{d}t.$$

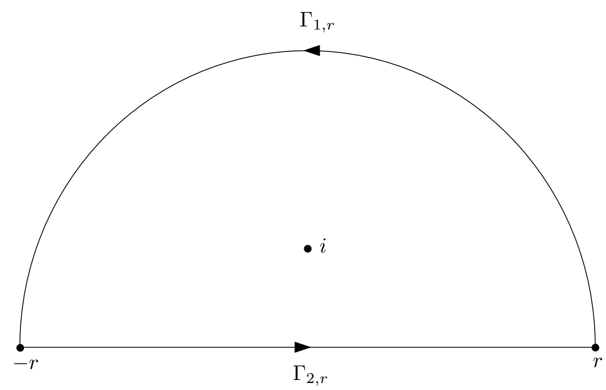
Pour $\lambda \in \mathbb{R}$ on pose

$$f_\lambda(z) = \frac{e^{-i\lambda z}}{1+z^2} = \frac{e^{-i\lambda z}}{(z-i)(z+i)}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{i, -i\}.$$

Supposons d'abord $\lambda \leqslant 0$. Soit $r > 1$. En intégrant sur le contour $\Gamma_r = \Gamma_{r,1} \cup \Gamma_{r,2}$ donné par la figure 2.1.1 ci-dessous, le théorème des résidus nous donne

$$2\pi i \operatorname{res}_i f_\lambda = \int_{\Gamma_r} f_\lambda(z)\mathrm{d}z = \int_{\Gamma_{r,1}} f_\lambda(z)\mathrm{d}z + \int_{\Gamma_{r,2}} f_\lambda(z)\mathrm{d}z.$$

Figure 2.1.1 – Le contour Γ_r



On a $\operatorname{res}_i f_\lambda = e^\lambda/2i$. Or, d'une part

$$\int_{\Gamma_{2,r}} f(z)\mathrm{d}z = \int_{-r,r} \frac{e^{-i\lambda t}}{1+t^2}\mathrm{d}t \underset{r\to\infty}{\longrightarrow} \widehat{f}(\lambda).$$

D'autre part, on a

$$\left|\int_{\Gamma_{r,1}} f_\lambda(z)\mathrm{d}z\right| = \left|\int_0^\pi \frac{e^{-i\lambda r\cos\theta}e^{\lambda r\sin\theta}}{1+r^2e^{2i\theta}} ire^{i\theta}\mathrm{d}\theta\right| \leqslant \int_0^\pi \frac{e^{\lambda r\sin\theta}}{r^2-1} r\mathrm{d}\theta \underset{r\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Il suit que $\widehat{f}(\lambda) = \pi e^\lambda$. Si $\lambda > 0$, on trouve en intégrant sur le contour conjugué $\overline{\Gamma_r}$ que $\widehat{f}(\lambda) = \pi e^{-\lambda}$. On a obtenu

$$\widehat{f}(\lambda) = \pi \exp -|\lambda|, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Exemple 2.1.5. Soit $f(t) = 1_{[-1,1]}(t)$. Alors

$$\widehat{f}(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-i\lambda t}\mathrm{d}t = \int_{-1}^1 e^{-i\lambda t}\mathrm{d}t = \frac{2\sin\lambda}{\lambda} = 2\operatorname{sinc}\lambda.$$

Exemple 2.1.6. Soit $f(t) = \exp -t^2$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On écrit

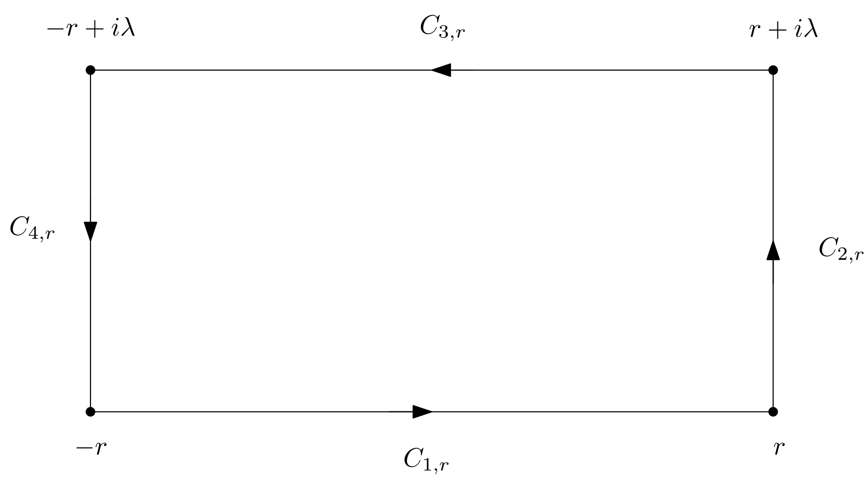
$$t^2 + it\lambda = (t + i\lambda/2)^2 + \lambda^2/4$$

ce qui donne

$$\widehat{f}(\lambda) = \int e^{-t^2 - it\lambda} \mathrm{d}t = e^{-\lambda^2/4} \int e^{-(t+i\lambda/2)^2} \mathrm{d}t.$$

On note $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la fonction définie par $g(z) = \exp -z^2$. On se donne $r > 0$ et on considère $C_r = C_{1,r} \cup C_{2,r} \cup C_{3,r} \cup C_{4,r}$ le contour donné par la figure 2.1.2 ci-dessous.

Figure 2.1.2 – Le contour C_r



Comme la fonction g est analytique sur $\mathbb{C}$, le théorème des résidus donne

$$0 = \int_{C_r} f(z) \mathrm{d}z.$$

D'abord, on a

$$\int_{C_{1,r}} g(z) \mathrm{d}z = \int_{-r}^{r} e^{-t^2} \mathrm{d}t \underset{r \to \infty}{\longrightarrow} \sqrt{\pi}.$$

Ensuite,

$$\int_{C_{3,r}} g(z) \mathrm{d}z = \int_{r}^{-r} e^{-(t+i\lambda/2)^2} \mathrm{d}t \underset{r \to \infty}{\longrightarrow} \int_{\mathbb{R}} e^{-(t+i\lambda/2)^2} \mathrm{d}t.$$

Enfin on a

$$\left| \int_{C_{2,r}} g(z) \mathrm{d}z \right| = \left| \int_{0}^{\lambda/2} e^{-(r+is)^2} \mathrm{d}s \right| \leqslant \int_{0}^{|\lambda|/2} e^{-r^2} e^{s^2} \mathrm{d}s \leqslant e^{-r^2} e^{\lambda^2/4} \underset{r \to \infty}{\longrightarrow} 0$$

et de même $\int_{C_{4,r}} g(z)\mathrm{d}z \to 0$ quand $r \to \infty$. On a obtenu finalement

$$\widehat{f}(\lambda) = \sqrt{\pi} e^{-\lambda^2/4} \int e^{-(t+i\lambda/2)^2} \mathrm{d}t = \sqrt{\pi}\, e^{-\lambda^2/4}.$$

2.1.3 Produit de convolution sur $L^1(\mathbb{R}^n) \times L^\infty(\mathbb{R}^n)$

Définition 2.1.7. Étant données deux fonctions $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ et $g \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, leur *produit de convolution* $f \star g$ est donné par

$$(f \star g)(x) = \int f(y) g(x-y) \mathrm{d}y.$$

Le produit de convolution de deux fonctions L^1 et L^∞ est automatiquement continu et borné.

Proposition 2.1.8. *Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ et $g \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Alors le produit de convolution $f \star g$ est une fonction continue et bornée sur $\mathbb{R}^n$.*

Pour montrer la proposition, nous aurons besoin du lemme suivant.

Lemme 2.1.9. *Pour $a \in \mathbb{R}^n$ et $p \in [1, \infty]$ on note $\tau_a : L^p(\mathbb{R}^n) \to L^p(\mathbb{R}^n)$ l'opérateur défini par*

$$\tau_a f = f(\cdot - a), \quad f \in L^p(\mathbb{R}^n).$$

Alors pour tout $p \in [1, \infty[$ et tout $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, l'application

$$\mathbb{R}^n \to L^p(\mathbb{R}^n), \quad a \mapsto \tau_a f,$$

est continue.

Démonstration. Soit $a \in \mathbb{R}^n$. Si f est continue à support compact, on a $\tau_b f \to \tau_a f$ simplement quand $b \to a$. Soit $r > 0$ tel que $\operatorname{supp} \tau_a f \subset B(0, r)$. Alors pour tout $b \in \mathbb{R}^n$ avec $|b - a| \leqslant 1$, on a $\operatorname{supp} \tau_b f \subset B(0, r+1)$. On a alors

$$|\tau_b f - \tau_a f|^p \leqslant 2^p \|f\|_\infty^p \mathbf{1}_{B(0,r+1)}$$

pour tout b tel que $|b - a| \leqslant 1$ et donc par convergence dominée on obtient

$$\|\tau_b f - \tau_a f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \left(\int |\tau_b f - \tau_a f|^p \right)^{1/p} \underset{b \to a}{\longrightarrow} 0.$$

Soient maintenant $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ et $\varepsilon > 0$. Par construction de l'intégrale de Lebesgue, $\mathscr{C}_c(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $L^p(\mathbb{R}^n)$. Par suite, on peut choisir $\varphi \in \mathscr{C}_c(\mathbb{R}^n)$ telle que $\|\varphi - f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} < \varepsilon$. Puisque $\tau_b\varphi \to \tau_a\varphi$ dans $L^p(\mathbb{R}^n)$, il existe $\delta > 0$ tel que $\|\tau_b\varphi - \tau_a\varphi\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} < \varepsilon$ pour tout $b \in \mathbb{R}^n$ vérifiant $|b-a| < \delta$. On obtient alors, pour $|b-a| < \delta$,

$$\|\tau_b f - \tau_a f\|_{L^p} \leqslant \|\tau_b f - \tau_b\varphi\|_{L^p} + \|\tau_b\varphi - \tau_a\varphi\|_{L^p} + \|\tau_a\varphi - \tau_a f\|_{L^p} < 3\varepsilon,$$

où on a utilisé que pour tout $c \in \mathbb{R}^n$ on a

$$\|\tau_c\varphi - \tau_c f\|_{L^p} = \|\tau_c(\varphi - f)\|_{L^p} = \|\varphi - f\|_{L^p} < \varepsilon.$$

Ceci conclut la démonstration. □

Démonstration de la proposition 2.1.8. Soient $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ et $g \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Alors $f \star g$ est clairement bornée puisque

$$|(f \star g)(x)| = \left|\int_{\mathbb{R}^n} \tau_{-x} f(-y) g(y) \mathrm{d}y\right| \leqslant \|g\|_\infty \|f\|_{L^1}.$$

Par ailleurs on a

$$|(f \star g)(x) - (f \star g)(y)| = \left|\int (\tau_{-x} - \tau_{-y}) f(-z) g(z) \mathrm{d}z\right| \leqslant \|g\|_\infty \|(\tau_{-x} - \tau_{-y}) f\|_{L^1} \to 0$$

quand $x \to y$ par le lemme 2.1.9, ce qui conclut la démonstration. □

2.1.4 Approximation de l'identité

Définition 2.1.10. Une *approximation de l'identité* est une famille de fonctions $\varphi_\varepsilon \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\varepsilon \in]0,1]$, satisfaisant les conditions

(i) $\int \varphi_\varepsilon(x)\mathrm{d}x = 1$ pour tout $\varepsilon > 0$;

(ii) $\sup_\varepsilon \|\varphi_\varepsilon\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} < \infty$;

(iii) pour tout $\delta > 0$, $\int_{|x|>\delta} |\varphi_\varepsilon(x)|\mathrm{d}x = 0 \to 0$ quand $\varepsilon \to 0$.

Exemple 2.1.11. Soit $\varphi \in \mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ telle que $\int \varphi(x)\mathrm{d}x = 1$. Pour tout $\varepsilon > 0$ on pose

$$\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\varphi(x/\varepsilon), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Alors $(\varphi_\varepsilon)_{\varepsilon \in]0,1]}$ est une approximation de l'identité.

Les approximations de l'identité sont très utiles pour approcher des fonctions par des fonctions lisses.

Théorème 2.1.12. *Soit $(\varphi_\varepsilon)_{\varepsilon\in]0,1]}$ une approximation de l'identité et $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Alors $\varphi_\varepsilon \star f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ et*

$$\varphi_\varepsilon \star f \to f \quad \textit{dans} \quad L^1(\mathbb{R}^n).$$

Si de plus $f \in \mathscr{C}_b(\mathbb{R}^n)$, la convergence a lieu localement uniformément.

Un corollaire immédiat est le suivant.

Corollaire 2.1.13. *L'espace $\mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $L^p(\mathbb{R}^n)$ pour $p \in [1, \infty[$.*

Démonstration. Le théorème permet d'affirmer immédiatement que $\mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $L^1(\mathbb{R}^n)$. Soit maintenant $p \geqslant 1$ quelconque, $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ et $\eta > 0$. Par densité de $\mathscr{C}_c(\mathbb{R}^n)$ dans $L^p(\mathbb{R}^n)$, il existe $g \in \mathscr{C}_c(\mathbb{R}^n)$ telle que $\|g - f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} < \eta$. Soient maintenant $\varphi \in \mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ à support dans $B(0,1)$ et (φ_ε) une approximation de l'identité donnée par l'exemple 2.1.11. Soit $r > 0$ tel que $\mathrm{supp}(g) \subset B(0,r)$. Alors $\varphi_\varepsilon \star g$ est supportée dans $B(0, r+1)$. Par ailleurs, on a $\varphi_\varepsilon \star g \to g$ localement uniformément par le théorème 2.1.12, donc la convergence $\varphi_\varepsilon \star g \to g$ a lieu uniformément sur $B(0, r+1)$. En particulier la convergence a aussi lieu dans $L^p(\mathbb{R}^n)$ et donc si $\varepsilon > 0$ est assez petit on a

$$\|\varphi_\varepsilon \star g - f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leqslant \|\varphi_\varepsilon \star g - g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|g - f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} < 2\eta,$$

ce qui conclut la preuve. □

Démonstration du théorème 2.1.12. Pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$ et tous $x, y \in \mathbb{R}^n$ on a

$$|\partial_x^\alpha \varphi_\varepsilon(x-y) f(y)| \leqslant \|\partial^\alpha \varphi_\varepsilon\|_{L^\infty} |f(y)|.$$

Ainsi le théorème de dérivation sous le signe intégral implique $\varphi_\varepsilon \star f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$. D'autre part le point (i) de la définition 2.1.10 nous donne, pour tout $\delta > 0$,

$$\begin{aligned}
\int |(\varphi_\varepsilon \star f)(x) - f(x)| \mathrm{d}x &= \int \left| \int \varphi_\varepsilon(x-y)(f(y) - f(x)) \mathrm{d}y \right| \mathrm{d}x \\
&\leqslant \iint |\varphi_\varepsilon(u)| \; |f(x-u) - f(x)| \; \mathrm{d}u \, \mathrm{d}x \\
&\leqslant \int |\varphi_\varepsilon(u)| \|\tau_u f - f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \mathrm{d}u \\
&\leqslant 2\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \int_{|u|>\delta} |\varphi_\varepsilon(u)| \mathrm{d}u + C \sup_{|u|<\delta} \|\tau_u f - f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}.
\end{aligned}$$

Ici $C = \sup_\varepsilon \|\varphi_\varepsilon\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$ est fini par le point (ii) de la définition 2.1.10. Soit $\eta > 0$. Par le lemme 2.1.9, il existe $\delta > 0$ tel que

$$\sup_{|u|<\delta} \|\tau_u f - f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} < \eta / C.$$

Par le point (iii) de la définition 2.1.10, pour $\varepsilon > 0$ assez petit, on a

$$\int_{|u|>\delta} |\varphi_\varepsilon(u)| \mathrm{d}u < \eta / \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}.$$

Ainsi, pour $\varepsilon > 0$ assez petit, $\|\varphi\star f - f\|_{L^1}(\mathbb{R}^n) < 2\eta$. On a bien montré $\varphi_\varepsilon \star f \to f$ dans $L^1(\mathbb{R}^n)$. Si de plus f est continue, alors

$$\begin{aligned}|(\varphi_\varepsilon \star f)(x) - f(x)| &= \left|\int \varphi_\varepsilon(u)(f(x-u) - f(x))\mathrm{d}u\right| \\ &\leqslant 2\|f\|_\infty \int_{|u|>\delta} |\varphi_\varepsilon(u)|\mathrm{d}u + C \sup_{|u|<\delta} |f(x-u) - f(x)|\end{aligned}$$

où $C = \sup_\varepsilon \|\varphi_\varepsilon\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$. Soit maintenant $K \subset \mathbb{R}^n$ un compact et $\eta > 0$. La fonction f étant continue sur K, elle y est uniformément continue. Par suite il existe $\delta > 0$ tel que

$$\sup_{x\in K} \sup_{|u|<\delta} |f(x-u) - f(x)| < \eta/C.$$

Si maintenant $\varepsilon > 0$ est assez petit, on a $\leqslant 2\|f\|_\infty \int_{|u|>\delta} |\varphi_\varepsilon(u)|\mathrm{d}u < \eta$ et on obtient bien

$$\sup_{x\in K} |(\varphi_\varepsilon \star f)(x) - f(x)| < 2\eta.$$

On a bien montré la convergence localement uniforme de $\varphi_\varepsilon \star f$ vers f. $\square$

2.1.5 Propriétés de la transformée de Fourier

Regardons à présent comment la transformée de Fourier se comporte par rapport à certaines opérations classiques sur les fonctions. Dans toute la suite, pour $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ et $\nu \in \mathbb{R}^*$, on note

$$h_\nu f(x) = f(\nu x), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Proposition 2.1.14 (Propriétés de la transformée de Fourier). *Soient $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $a \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Alors on les propriétés suivantes.*

(i) (Translation) *On a $\widehat{\tau_a f} = e_{-a}\widehat{f}$ ou encore*

$$\widehat{\tau_a f}(\xi) = e^{-ia\cdot\xi}\widehat{f}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

(ii) (Translation) *On a $\widehat{h_\lambda f} = |\lambda|^{-n} h_{1/\lambda}\widehat{f}$, soit*

$$\widehat{h_\lambda f}(\xi) = |\lambda|^{-n}\widehat{f}(\xi/\lambda), \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

(iii) (Convolution) *Si $f \star g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, alors*

$$\widehat{f \star g} = \widehat{f} \cdot \widehat{g}.$$

(iv) (Dérivation) *Soient* $\alpha \in \mathbb{N}^n$ *et* $f \in \mathscr{C}^{|\alpha|}(\mathbb{R}^n)$ *tels que* $\partial^\gamma f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ *pour tout* $\gamma \leqslant \alpha$. *Alors*
$$\widehat{\partial^\alpha f}(\xi) = (i\xi)^\alpha \widehat{f}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Démonstration. Pour le premier point on écrit simplement

$$\widehat{\tau_a f}(\xi) = \int f(x-a)e^{-ix\cdot\xi}\,\mathrm{d}x = \int f(u)e^{-i(u+a)\cdot\xi}\,\mathrm{d}u = e^{-ia\cdot\xi}\widehat{f}(\xi).$$

Pour le second,

$$\widehat{h_\lambda f}(\xi) = \int f(\lambda x)e^{-ix\cdot\xi}\,\mathrm{d}x = \int f(u)e^{-iu\ \cdot\xi/\lambda}|\lambda|^{-n}\mathrm{d}u = |\lambda|^{-n}h_{1/\lambda}\widehat{f}(\xi).$$

Le troisième point résulte encore d'un calcul direct,

$$\widehat{f\star g}(\xi) = \int\left(\int f(x-y)g(y)\mathrm{d}y\right)e^{-ix\cdot\xi}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int g(y)\widehat{\tau_y f}(\xi)\mathrm{d}y,$$

et par le point (i) on a

$$\int g(y)\widehat{\tau_y f}(\xi)\mathrm{d}y = \int g(y)\widehat{f}(\xi)e^{-iy\cdot\xi}\mathrm{d}y = \widehat{f}(\xi)\widehat{g}(\xi).$$

Enfin pour le dernier point, on remarque simplement que si $f \in \mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ on a $\partial_x^\alpha(e^{-ix\cdot\xi}) = (-1)^{|\alpha|}(i\xi)^\alpha$, ce qui donne

$$(i\xi)^\alpha\widehat{f}(\xi) = \int(i\xi)^\alpha f(x)e^{-ix\cdot\xi}\,\mathrm{d}x = (-1)^{|\alpha|}\int f(x)\partial_x^\alpha(e^{-ix\cdot\xi})\,\mathrm{d}x$$

et une intégration par parties permet de conclure que

$$\int f(x)\partial_x^\alpha(e^{-ix\cdot\xi})\,\mathrm{d}x = \int \partial^\alpha f(x)e^{-ix\cdot\xi}\mathrm{d}x = \widehat{\partial^\alpha f}(\xi).$$

On conclut la démonstration en utilisant la proposition suivante. □

Proposition 2.1.15. *Soit* $\varepsilon > 0$, $\alpha \in \mathbb{N}^n$ *et* $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap \mathscr{C}^{|\alpha|}(\mathbb{R}^n)$ *telle que* $\partial^\gamma f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ *pour tout* $\gamma \leqslant \alpha$. *Alors il existe* $\widetilde{f} \in \mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ *telle que*

$$\|\partial^\gamma f_\varepsilon - \partial^\gamma f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} < \varepsilon, \quad \gamma \leqslant \alpha. \tag{2.1}$$

Démonstration. Soient α et $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ comme ci-dessus, et $\varepsilon > 0$. On se donne $(\varphi_\eta)_{\eta\in]0,1]}$ une approximation de l'identité. On a $\varphi_\eta \star f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ par le théorème 2.1.12. De plus par le théorème de dérivation sous le signe $\int$ on a

$$\partial^\gamma(\varphi_\eta \star f) = \varphi_\eta \star \partial^\gamma f$$

pour tout $\gamma \leqslant \alpha$. Par le théorème 2.1.12, il existe $\eta > 0$ assez petit tel que

$$\|\varphi_\eta \star \partial^\gamma f - \partial^\gamma f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} < \varepsilon/2, \quad \gamma \leqslant \alpha. \tag{2.2}$$

Soit maintenant $\chi \in \mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n, [0,1])$ telle que $\chi(x) = 1$ pour tout $|x| \leqslant 1$. Alors $\chi_\delta(\varphi_\eta \star f) \in \mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ et pour tout $\gamma \leqslant \alpha$ on a

$$\partial^\gamma\left(\chi_\delta(\varphi_\eta \star f)\right) = \chi_\delta(\varphi_\eta \star \partial^\gamma f) + \sum_{\substack{\beta \leqslant \gamma \\ \beta \neq 0}} c_{\gamma,\beta} \partial^\beta(\chi_\delta)(\varphi_\eta \star \partial^{\gamma-\beta} f). \tag{2.3}$$

pour des constantes $c_{\gamma,\beta} > 0$. Pour tout $\beta \neq 0$ on a

$$\left\|\partial^\beta(\chi_\delta)(\varphi_\eta \star \partial^{\gamma-\beta} f)\right\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leqslant \left\|\partial^\beta \chi_\delta\right\|_\infty \left\|(\varphi_\eta \star \partial^{\gamma-\beta} f)\right\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}.$$

La norme infinie de $\partial^\beta \chi_\delta$ peut être contrôlée comme suit,

$$\left\|\partial^\beta \chi_\delta\right\|_\infty = \delta^{|\beta|_1} \left\|(\partial^\beta \chi)(\delta \cdot)\right\|_\infty \leqslant \delta^{|\beta|_1} \|\partial^\beta \chi\|_\infty.$$

En particulier la somme dans le terme de droite de (2.3) tend vers 0 dans $L^1(\mathbb{R}^n)$ quand $\delta \to 0$. Par ailleurs on a

$$\|\chi_\delta(\varphi_\eta \star \partial^\gamma f) - \varphi_\eta \star \partial^\gamma f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leqslant \int_{|x| \geqslant \delta^{-1}} |(\varphi_\eta \star f)(x)| \mathrm{d}x \longrightarrow 0$$

quand $\delta \to 0$. On a montré que

$$\partial^\gamma\left(\chi_\delta(\varphi_\eta \star f)\right) \to \varphi_\eta \star \partial^\gamma f$$

dans $L^1(\mathbb{R}^n)$ quand $\delta \to 0$. Soit $\delta > 0$ assez petit tel que

$$\|\partial^\gamma\left(\chi_\delta(\varphi_\eta \star f)\right) - \varphi_\eta \star \partial^\gamma f\| < \varepsilon/2, \quad \gamma \leqslant \alpha.$$

En combinant ceci avec (2.2), on obtient bien (2.1) avec $\widetilde{f} = \chi_\delta(\varphi_\eta \star f)$. □

2.1.6 Lemme de Riemann–Lebesgue

Nous pouvons à présent énoncer le résultat principal de cette section.

Théorème 2.1.16 (Lemme de Riemann–Lebesgue). *Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Alors $\widehat{f}$ est continue et tend vers zéro à l'infini.*

Démonstration. Traitons d'abord le cas où $f \in \mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Le point (iv) de la proposition 2.1.14 nous assure que

$$\sum_{j=1}^n \left|\widehat{\partial_{x_j} f}(\xi)\right| = \left(\sum_{j=1}^n |\xi_j|\right) \left|\widehat{f}(\xi)\right|,$$

ce qui donne

$$\left|\widehat{f}(\xi)\right| \leqslant \left(\sum_{j=1}^{n} |\xi_j|\right)^{-1} \sum_{j=1}^{n} \|\partial_{x_j} f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \underset{|\xi|\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Soient maintenant $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ quelconque et $\varepsilon > 0$. Le corollaire 2.1.13 assure qu'il existe $\varphi \in \mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ telle que $\|\varphi - f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} < \varepsilon$. On écrit à présent

$$\left|\widehat{f}(\xi)\right| \leqslant \left|\widehat{f}(\xi) - \widehat{\varphi}(\xi)\right| + |\widehat{\varphi}(\xi)| \leqslant \|\varphi - f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} + |\widehat{\varphi}(\xi)| < \varepsilon + |\widehat{\varphi}(\xi)|.$$

Comme $\widehat{\varphi}(\xi) \to 0$ quand $|\xi| \to \infty$ par ce qui précède, on obtient bien $\left|\widehat{f}(\xi)\right| < 2\varepsilon$ dès que $|\xi|$ est assez grand. □

2.2 Formule d'inversion

2.2.1 Transformée de Fourier d'une gaussienne

On a vu dans la section précédente que si $G_\alpha(t) = \exp -\alpha t^2$, alors

$$\widehat{G}_\alpha = \sqrt{\pi/\alpha}\, G_{1/4\alpha}.$$

Autrement dit, la transformée de Fourier d'une gaussienne est une gaussienne. Ce résultat se généralise en dimension supérieure, comme suit.

Théorème 2.2.1 (Transformée de Fourier d'une gaussienne dans $\mathbb{R}^n$). *Pour toute matrice $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique, définie positive, on pose*

$$G_A(x) = \exp(-Ax \cdot x), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Alors on a l'identité $\widehat{G_A} = \dfrac{\pi^{n/2}}{\sqrt{\det A}} G_{A^{-1}/4}$, i.e.

$$\int \exp\left(-Ax \cdot x\right) e^{-ix\cdot\xi}\, \mathrm{d}x = \frac{\pi^{n/2}}{\sqrt{\det A}} \exp\left(\frac{-A^{-1}\xi \cdot \xi}{4}\right), \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Démonstration. On commence par le cas où $A = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ avec $\lambda_j > 0$

pour tout $j = 1, \dots, n$. On calcule

$$\begin{aligned}\int e^{-Ax\cdot x} e^{-i\xi\cdot x}\mathrm{d}x &= \int \exp\left(-\sum_{j=1}^{n}\left(\lambda_j x_j^2 + i x_j \xi_j\right)\right)\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n \\ &= \prod_{j=1}^{n}\int \exp(-\lambda_j x_j^2 - i x_j\xi_j)\mathrm{d}x_j \\ &= \prod_{j=1}^{n}\sqrt{\frac{\pi}{\lambda_j}}\exp\left(-\frac{\xi_j^2}{4\lambda_j}\right) \\ &= \frac{\pi^{n/2}}{\sqrt{\det A}}\exp\left(\frac{-A^{-1}\xi\cdot\xi}{4}\right),\end{aligned}$$

ce qui montre le cas où A est diagonale. Si A est une matrice quelconque symétrique définie positive, alors il existe $P \in \mathrm{O}(n, \mathbb{R})$ telle que PAP^{-1} est diagonale. Puisque $|\det P| = 1$, le changement de variable $y = P^{-1}x$ donne

$$\begin{aligned}\int e^{-Ax\cdot x}e^{-ix\cdot\xi}\mathrm{d}x &= \int e^{-AP^{-1}y\cdot P^{-1}y}e^{-iP^{-1}y\cdot\xi}\mathrm{d}y \\ &= \int e^{-PAP^{-1}y\cdot y}e^{-iy\cdot P\xi}\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

où on a utilisé $(P^{-1})^\top = P$ dans la deuxième égalité. Comme PAP^{-1} est diagonale on obtient par ce qui précède

$$\widehat{G}_A(\xi) = \frac{\pi^{n/2}}{\sqrt{\det(PAP^{-1})}}\exp\left(-\frac{(PAP^{-1})^{-1}P\xi\cdot P\xi}{4}\right).$$

Or $\det(PAP^{-1}) = \det A$ et $(PAP^{-1})^{-1}P\xi\cdot P\xi = A\xi\cdot\xi$, ce qui conclut la démonstration. $\square$

Le lemme suivant montre qu'on peut par ailleurs utiliser les gaussiennes pour obtenir des approximations de l'identité.

Lemme 2.2.2. *La famille* $(\Phi_\eta)_{\eta\in]0,1]}$, *donnée par*

$$\Phi_\eta(x) = (\eta\pi)^{-n/2}G_{\eta^{-1}\mathrm{I}_n}(x) = (\eta\pi)^{-n/2}\exp\left(-|x|^2/\eta\right), \quad x\in\mathbb{R}^n, \quad \eta\in\,]0,1]\,,$$

est une approximation de l'identité.

Démonstration. Remarquons déjà que $\Phi_\eta \geqslant 0$. De plus, le changement de variable $y = \eta^{-1/2}x$ donne

$$\int \Phi_\eta(x)\mathrm{d}x = (\eta\pi)^{-n/2}\int e^{-|x|^2/\eta}\mathrm{d}x = (\eta\pi)^{-n/2}\eta^{n/2}\int e^{-|y|^2}\mathrm{d}y = 1,$$

de sorte que (Φ_η) vérifie les points (i) et (ii) de la définition 2.1.10. Ici on a utilisé le fait que
$$\int \exp(-|x|^2)\mathrm{d}x = \Big(\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2}\mathrm{d}t\Big)^n = \pi^{n/2}.$$
Pour le dernier point de la définition 2.1.10, on écrit simplement pour $\delta > 0$
$$\int_{|x|>\delta} \Phi_\eta(x)\mathrm{d}x = \pi^{-n/2}\int_{|x|>\eta^{-1/2}\delta} e^{-|x|^2}\mathrm{d}x \underset{\eta\to 0}{\longrightarrow} 0.$$
Ceci conclut la démonstration. □

2.2.2 Formule d'inversion de Fourier

Dans ce paragraphe, nous allons voir qu'une fonction peut être reconstruite à partir de sa transformée de Fourier. Si f est une fonction $\mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, on note $\mathcal{J}f$ le renversé de f donné par
$$\mathcal{J}f(x) = f(-x), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$
Le renversement est une isométrie involutive $L^p(\mathbb{R}^n) \to L^p(\mathbb{R}^n)$ pour $p \in [1,\infty]$, c'est-à-dire que
$$\mathcal{J}^2 = -1 \quad \text{et} \quad \|\mathcal{J}f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \quad \text{pour tout } f \in L^p(\mathbb{R}^n).$$
Notons que le renversement $\mathcal{J}$ commute avec la transformée de Fourier,
$$\mathcal{J}\mathcal{F} = \mathcal{F}\mathcal{J} \quad \text{sur } L^1(\mathbb{R}^n). \tag{2.4}$$
Enfin $\mathcal{J}$ est auto-adjoint sur $L^2(\mathbb{R}^n)$,
$$\langle \mathcal{J}f, g\rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \langle f, \mathcal{J}g\rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)}, \quad f, g \in L^2(\mathbb{R}^n).$$
Théorème 2.2.3 (Formule d'inversion de Fourier). *Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ telle que $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Alors on a*
$$f = (2\pi)^{-n}\mathcal{J}\mathcal{F}\widehat{f} \quad \textit{dans } L^1(\mathbb{R}^n).$$
Autrement dit, on a l'identité
$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int \widehat{f}(\xi)e^{ix\cdot\xi}\,\mathrm{d}\xi \quad \textit{pour presque tout } x \in \mathbb{R}^n.$$
Remarque 2.2.4. Notons que sous les hypothèses du théorème précédent, la fonction $\widetilde{f} = (2\pi)^{-n}\mathcal{J}\mathcal{F}^2 f$ est continue puisque $\widehat{f}$ est dans $L^1(\mathbb{R}^n)$.

Le théorème 2.2.3 nous dit que toute fonction raisonnable peut être représentée comme une superposition d'ondes planes

$$e_\xi : x \mapsto \exp(ix \cdot \xi).$$

On peut être tenté de montrer le résultat en calculant

$$\int \widehat{f}(\xi) e^{ix\cdot\xi}\, \mathrm{d}\xi = \int\int f(y) e^{i(x-y)\cdot\xi} \mathrm{d}\xi \mathrm{d}y = \int f(y) \left(\int e^{i(x-y)\cdot\xi}\, \mathrm{d}\xi \right) \mathrm{d}y. \tag{2.5}$$

Le problème est que l'intégrale $\int e^{i(x-y)\cdot\xi} \mathrm{d}\xi$ est (hautement) non convergente ! Pour résoudre ce problème, on va introduire la gaussienne $\exp(-\varepsilon|\xi|^2)$ dans la première intégrale de (2.5) pour rendre les intégrales convergence, puis on fera tendre ε vers zéro.

Démonstration. Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ telle que $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ on note

$$\widetilde{f}(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int \widehat{f}(\xi) e^{ix\cdot\xi}\, \mathrm{d}\xi.$$

La fonction $\widetilde{f}$ est continue puisque $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$. Par ailleurs on a par convergence dominée

$$\widetilde{f}(x) = (2\pi)^{-n} \lim_{\varepsilon\to 0} \int \widehat{f}(\xi) e^{ix\cdot\xi} e^{-\varepsilon|\xi|^2}\, \mathrm{d}\xi.$$

Le théorème de Fubini nous donne

$$\int \widehat{f}(\xi) e^{ix\cdot\xi} e^{-\varepsilon|\xi|^2}\, \mathrm{d}\xi = \int f(y) \left(\int e^{i(x-y)\cdot\xi} e^{-\varepsilon|\xi|^2}\, \mathrm{d}\xi \right) \mathrm{d}y.$$

Or par le théorème 2.2.1, on a

$$\int e^{i(x-y)\cdot\xi} e^{-\varepsilon|\xi|^2}\, \mathrm{d}\xi = \widehat{G_{\varepsilon \mathrm{I}_n}}(x-y) = \frac{\pi^{n/2}}{\varepsilon^{n/2}} e^{-|x-y|^2/4\varepsilon}.$$

En injectant ceci dans l'égalité précédente, on obtient

$$\int \widehat{f}(\xi) e^{ix\cdot\xi} e^{-\varepsilon|\xi|^2}\, \mathrm{d}\xi = \frac{\pi^{n/2}}{\varepsilon^{n/2}} \int f(y) e^{-|x-y|^2/4\varepsilon} \mathrm{d}y = \frac{\pi^{n/2}}{\varepsilon^{n/2}} (G_{\mathrm{I}_n/4\varepsilon} \star f)(x).$$

Remarquons à présent que, avec les notations du lemme 2.2.2, on a

$$\frac{\pi^{n/2}}{\varepsilon^{n/2}} G_{\mathrm{I}_n/4\varepsilon} = (2\pi)^n \left(4\pi\varepsilon\right)^{-n/2} G_{\mathrm{I}_n/4\varepsilon} = (2\pi)^n \Phi_{4\varepsilon}.$$

Ainsi $\widetilde{f}(x) = \lim_\varepsilon (\Phi_{4\varepsilon} \star f)(x)$ et donc on a montré que

$$\Phi_{4\varepsilon} \star f \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \widetilde{f} \quad \text{simplement sur } \mathbb{R}^n.$$

Par ailleurs le lemme 2.2.2 et le théorème 2.1.12 impliquent

$$\Phi_{4\varepsilon} \star f \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} f \quad \text{dans} \quad L^1(\mathbb{R}^n).$$

Enfin par le lemme 2.2.5 ci-dessous, il existe une suite (ε_k) qui tend vers zéro telle que $\Phi_{4\varepsilon_k} \star f \to f$ simplement quand $k \to \infty$, et donc $\widetilde{f} = f$ presque partout. $\square$

Lemme 2.2.5. *Soit (f_ℓ) une suite de $L^1(\mathbb{R}^n)$ qui converge vers f dans $L^1(\mathbb{R}^n)$. Alors il existe une sous-suite (f_{ℓ_k}) qui converge presque sûrement vers f.*

Démonstration. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe $\ell_k \in \mathbb{N}$ tel que $\|f_{\ell_k} - f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} < 2^{-k}$. On peut supposer la suite (ℓ_k) strictement croissante, et par le théorème de Fubini positif,

$$\int \left(\sum_{k=0}^{\infty} |f_{\ell_k}(x) - f(x)| \right) \mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{\infty} \|f_{\ell_k} - f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} < \infty.$$

Par suite, on a $\sum_{k=0}^{\infty} |f_{\ell_k}(x) - f(x)| < \infty$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}^n$. Pour un tel x, on a $\lim_{k\to\infty} f_{\ell_k}(x) = f(x)$, ce qui conclut la démonstration. $\square$

Un corollaire immédiat du théorème 2.2.3 est l'injectivité de la transformée de Fourier.

Corollaire 2.2.6 (Injectivité de la transformation de Fourier). *Soient f et g deux fonctions de $L^1(\mathbb{R}^n)$ telles que $\widehat{f} = \widehat{g}$. Alors $f = g$.*

Démonstration. En effet si $h = f - g$ on a $\widehat{h} = 0 \in L^1(\mathbb{R}^n)$, donc la formule d'inversion de Fourier assure que pour presque tout $x \in \mathbb{R}^n$

$$h(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int \widehat{h}(\xi) e^{ix\cdot\xi} \mathrm{d}\xi = 0.$$

Ainsi $f = g$ presque partout. $\square$

2.3 Transformation de Fourier sur $L^2(\mathbb{R}^n)$

2.3.1 Extension à $L^2(\mathbb{R}^n)$

Dans ce paragraphe on étend la transformation de Fourier

$$\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{C}_{\to 0}(\mathbb{R}^n)$$

à un isomorphisme $L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$.

Proposition 2.3.1. *Soient $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Alors on a*

$$\int \widehat{f}(\xi) g(\xi) \mathrm{d}\xi = \int f(x) \widehat{g}(x) \mathrm{d}x.$$

Démonstration. Il suffit de remarquer qu'on a

$$\int \widehat{f}(\xi) g(\xi) \mathrm{d}\xi = \int f(x) e^{-ix\cdot\xi} g(\xi) \mathrm{d}x \mathrm{d}\xi = \int f(x) \widehat{g}(x) \mathrm{d}x$$

par le théorème de Fubini — que l'on peut appliquer ici du fait que l'intégrale $\int |f(x)| g(\xi)| \,\mathrm{d}x\mathrm{d}\xi$ est finie. □

Notons que $\mathcal{F}\,\overline{g} = \overline{\mathcal{J}\mathcal{F}g}$, so that

$$\langle \mathcal{F}f, g\rangle_{L^2} = \langle f, \mathcal{J}\mathcal{F}g\rangle_{L^2}, \quad f, g \in L^2(\mathbb{R}^n). \tag{2.6}$$

Théorème 2.3.2. *Pour toute fonction $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$, on a $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ et de plus*

$$\|\widehat{f}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = (2\pi)^{n/2} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

L'opérateur $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ admet une unique extension continue $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ qui est un isomorphisme vérifiant

$$\|\mathcal{F}f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = (2\pi)^{n/2} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}, \quad f \in L^2(\mathbb{R}^n),$$

et dont l'inverse est donné par

$$\mathcal{F}^{-1} = (2\pi)^{-n} \mathcal{J}\mathcal{F}.$$

Démonstration. Soit $f \in \mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. On a

$$(1 - \Delta) f = \left(1 - \sum_{j=1}^N \partial_{x_j}^2\right) f$$

de sorte que la proposition 2.1.14 donne $\widehat{(1-\Delta)f}(\xi) = \langle\xi\rangle^2 \widehat{f}(\xi)$. Par récurrence immédiate on voit que

$$\widehat{(1-\Delta)^N f}(\xi) = \langle\xi\rangle^{2N} \widehat{f}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad N \in \mathbb{N}.$$

En particulier $\widehat{f} \in L^1$. Par la formule d'inversion de Fourier, on a $f = (2\pi)^{-n} \mathcal{J}\mathcal{F}\mathcal{F}f$ de sorte que par (2.4) et (2.6) on a

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 = (2\pi)^{-n} \langle \mathcal{F}\mathcal{J}\mathcal{F}f, f\rangle = (2\pi)^{-n} \langle \mathcal{J}\mathcal{F}f, \mathcal{J}\mathcal{F}f\rangle = (2\pi)^{-n} \langle \mathcal{F}f, \mathcal{F}f\rangle$$

et donc $\|\mathcal{F}f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = (2\pi)^{-n/2}\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$. Comme $\mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $L^2(\mathbb{R}^n)$ par le corollaire 2.1.13, le lemme 2.3.3 ci-dessous permet d'affirmer que $\mathcal{F}$ admet une unique extension à $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$, qui vérifie encore l'identité $\|\mathcal{F}f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = (2\pi)^{-n/2}\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$ pour tout $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$. On note

$$\mathcal{G} = (2\pi)^{-n}\mathcal{J}\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n).$$

Alors $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ commutent et

$$\mathcal{G}\mathcal{F}\varphi = \mathcal{F}\mathcal{G}\varphi = \varphi, \quad \varphi \in \mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n),$$

par la formule d'inversion de Fourier. Encore une fois, la densité de $\mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ dans $L^2(\mathbb{R}^n)$ implique que l'identité ci-dessus est satisfaite pour toute $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^n)$. On en déduit que $\mathcal{F}$ est inversible sur L^2 avec $\mathcal{F}^{-1} = \mathcal{G}$. □

Lemme 2.3.3. *Soient E, F deux espaces vectoriels normés, et $\mathscr{D} \subset E$ un sous-espace dense. On suppose de plus que F est complet. Soit $T : \mathscr{D} \to F$ un opérateur linéaire tel que pour une certaine constante $C > 0$ on a*

$$\|Tv\|_F \leqslant C\|v\|_E, \quad v \in \mathscr{D}, \tag{2.7}$$

Alors T s'étend de manière unique en un opérateur linéaire continu $T : E \to F$, et on a alors $\|T\|_{E\to F} \leqslant C$.

Démonstration. Soit $v \in E$ et (v_k) une suite de $\mathscr{D}$ telle que $v_k \to v$ dans E quand $k \to \infty$. Alors pour tous k, ℓ, on a

$$\|Tv_k - Tv_\ell\|_F \leqslant C\|v_k - v_\ell\|_E.$$

En particulier, la suite (Tv_k) est de Cauchy dans F. Comme F est un espace de Banach, il existe $w \in F$ tel que $Tv_k \to w$. Remarquons que si (u_k) est une autre suite qui converge vers v, on a

$$\|Tv_k - Tu_k\|_F \leqslant C\|u_k - v_k\|_E \to 0$$

donc (u_k) et (v_k) convergent vers la même limite. On peut donc définir $T : E \to F$ en posant $Tv = \lim_k Tv_k$ où (v_k) est n'importe quelle suite de $\mathscr{D}$ qui converge vers v dans E. On a bien sûr pour tout $v \in E$

$$\|Tv\|_F = \lim_k \|Tv_k\|_F \leqslant C \lim_k \|v_k\|_E = C\|v\|_E.$$

D'autre part T est clairement linéaire par linéarité de la limite. Enfin si $\widetilde{T} : E \to F$ est une autre extension continue et $v \in E$, on a pour toute suite (v_k) de $\mathscr{D}$ qui converge vers v dans E,

$$\widetilde{T}v = \lim_k \widetilde{T}v_k = \lim_k Tv_k = Tv,$$

d'où l'unicité de l'extension T. □

Remarque 2.3.4. Pour $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, l'intégrale

$$\widehat{f}(\xi) = \int f(x) e^{ix\cdot\xi} \mathrm{d}x$$

n'a a priori pas de sens. La fonction $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ est définie comme la limite dans $L^2(\mathbb{R}^n)$ de $\widehat{\varphi}_k$ où (φ_k) est une suite de $\mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ qui converge vers f dans L^2.

Il y a d'autres manières d'approximer $\widehat{f}$ (dans L^2 !), comme le montre le fait suivant.

Exemple 2.3.5. Soit $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Alors on a $\widehat{f} = \lim_k g_k$ dans $L^2(\mathbb{R}^n)$, où on a noté

$$g_k(\xi) = \int_{B(0,k)} f(x) e^{-ix\cdot\xi} \mathrm{d}x, \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

En effet, on a $g_k = \mathcal{F}(\mathbf{1}_{B(0,k)} f)$. Or $\mathbf{1}_{B(0,k)} f \to f$ dans $L^2(\mathbb{R}^n)$. Par continuité de $\mathcal{F}$ sur $L^2(\mathbb{R}^n)$ on obtient bien $\widehat{f} = \lim_k g_k$ dans $L^2(\mathbb{R}^n)$.

2.3.2 Principe d'incertitude de Heiseinberg

Dans ce paragraphe on montre qu'une fonction ne peut pas être très localisée à la fois en espace et en fréquence. On commence par une remarque simple, qui nous dit que les supports d'une fonction non nulle et de sa transformée de Fourier ne peuvent tous les deux être compacts.

Proposition 2.3.6. *Soit $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ telle que f et $\widehat{f}$ sont à support compact. Alors f est nulle.*

Démonstration. En effet, comme $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ est à support compact, la fonction

$$\widetilde{f}(x) = (2\pi)^{-n} \int \widehat{f}(\xi) e^{ix\cdot\xi} \mathrm{d}\xi, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

est analytique réelle en chacune de ses variables. En effet, on a

$$\widetilde{f}(x) = (2\pi)^{-n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^k}{k!} \int (x\cdot\xi)^k \widehat{f}(\xi) \mathrm{d}\xi$$

et en remarquant que $(x\cdot\xi)^k = \sum_{|\alpha|_1 = k} x^\alpha \xi^\alpha$ on obtient

$$\widetilde{f}(x) = (2\pi)^{-n} \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} \frac{(ix)^\alpha}{|\alpha|_1!} \int \xi^\alpha \widehat{f}(\xi) \mathrm{d}\xi.$$

Comme $\widetilde{f}$ coïncide presque partout avec f, elle est à support compact, donc nulle par principe des zéros isolés. $\square$

Une incarnation plus quantitative de ce principe est la suivante.

THÉORÈME 2.3.7 (Principe d'incertitude de Heiseinberg). *Soit* $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$. *On note*

$$\sigma_f = \int |f(x)|^2 |x|^2 \mathrm{d}x \quad et \quad \sigma_{\widehat{f}} = \int |\widehat{f}(\xi)|^2 |\xi|^2 \mathrm{d}\xi$$

les dispersions de f *en espace et fréquence autour de* 0, *respectivement. Alors on a l'inégalité*

$$\sqrt{\sigma_f \sigma_{\widehat{f}}} \geqslant \frac{n(2\pi)^{n/2}}{2} \|f\|_{L^2}.$$

Démonstration. On suppose d'abord $f \in \mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Alors une intégration par parties donne, pour $j = 1, \ldots, n$,

$$\int x_j \partial_{x_j} |f|^2 = -\int |f|^2.$$

L'inégalité de Cauchy-Schwartz permet alors d'écrire

$$\begin{aligned}\|f\|_{L^2} = -\int x_j \partial_{x_j} |f|^2 &= -\int x_j f(x) \partial_{x_j} \bar{f}(x) \mathrm{d}x - \int x_j \bar{f}(x) \partial_{x_j} f(x) \mathrm{d}x \\ &\leqslant 2 \left(\int x_j^2 |f(x)|^2 \, \mathrm{d}x \right)^{1/2} \left(\int |\partial_{x_j} f(x)|^2 \, \mathrm{d}x \right)^{1/2}.\end{aligned}$$

On note $\alpha_j = \int x_j^2 |f(x)|^2 \mathrm{d}x$ et $\beta_j = \int |\partial_{x_j} f(x)|^2 \mathrm{d}x$. On a montré que

$$\sqrt{\alpha_j \beta_j} \geqslant \frac{\|f\|_{L^2}^2}{2}, \quad j = 1, \ldots, n.$$

En sommant on obtient

$$\frac{n\|f\|_{L^2}^2}{2} \leqslant \sum_{j=1}^n \sqrt{\alpha_j \beta_j} \leqslant \left(\sum_{j=1}^n \alpha_j \right)^{1/2} \left(\sum_{j=1}^n \beta_j \right)^{1/2} = \sqrt{\sigma_f \sigma_{\widehat{f}}},$$

encore par l'inégalité de Cauchy-Schwarz sur $\mathbb{R}^n$. Cette inégalité reste vraie pour toute fonction $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ par densité de $\mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ dans $L^2(\mathbb{R}^n)$ et par continuité de $\mathscr{F}$ sur $L^2(\mathbb{R}^n)$. □

EXERCICE 2.3.8. Soit $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ telle que $\sigma_f, \sigma_{\widehat{f}} < \infty$. On suppose qu'il y a égalité pour f dans l'inégalité de Heisenberg,

$$\sqrt{\sigma_f \sigma_{\widehat{f}}} = \frac{n(2\pi)^{n/2}}{2} \|f\|_{L^2}.$$

En reprenant la preuve du théorème 2.3.7, montrer que f est une gaussienne.

Chapitre 3

Quelques applications

Dans ce chapitre nous donnons trois applications de la théorie de Fourier : la formule sommatoire de Poisson, le théorème d'échantillonnage de Shannon, et le prolongement méromorphe de la fonction zêta ainsi que la localisation de ses zéros non triviaux dans la bande critique $\mathbb{C}_{]0,1[}$.

Sommaire

3.1 Formule sommatoire de Poisson 35
3.1.1 Énoncé 35
3.1.2 Exemples d'applications 37
3.2 Le théorème de Shannon 38
3.3 La fonction zêta de Riemann 39
3.3.1 La fonction Γ d'Euler 39
3.3.2 Produit eulérien 41
3.3.3 Équation fonctionnelle pour ζ 42
3.3.4 Zéros de la fonction ζ 44

3.1 Formule sommatoire de Poisson

3.1.1 Énoncé

Le but de ce paragraphe est de montrer le résultat suivant.

Théorème 3.1.1 (Formule sommatoire de Poisson). *Soit $\varphi \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R})$ satisfaisant les bornes*

$$|\varphi(t)| \leqslant \frac{C}{1+t^2} \quad et \quad |\varphi'(t)| \leqslant \frac{C}{1+t^2}, \quad t \in \mathbb{R},$$

pour une certaine constante $C > 0$. Alors

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{\varphi}(2\pi n).$$

Remarque 3.1.2. La première somme converge absolument grâce à la première inégalité ; c'est une conséquence du théorème que c'est aussi le cas pour la deuxième somme.

Démonstration. Pour tout $t \in \mathbb{R}$ on pose

$$\Phi(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \varphi(t+n).$$

Alors pour tout $r > 0$ on a par hypothèse

$$|\varphi^{(k)}(t+n)| \leqslant \frac{C}{1+(|n|-r)^2}, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad |t| \leqslant r, \quad k = 0, 1.$$

Il suit que la série de fonctions $\sum_n \varphi^{(k)}(\square + n)$ converge normalement pour $k = 0, 1$ sur $[-r, r]$. Il suit que Φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[-r, r]$ et comme $r > 0$ est arbitraire, on obtient que Φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Comme Φ est 1-périodique, elle coïncide avec sa série de Fourier par le théorème de Dirichlet (REF). Cela se traduit par l'égalité

$$\Phi(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(\Phi)\exp(2\pi i n t), \quad t \in \mathbb{R} \tag{3.1}$$

où pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $c_n(\varphi)$ est le n^{e} coefficient de Fourier de φ, donné par

$$c_n(\Phi) = \int_0^1 \Phi(t)e^{-2\pi i n t}\mathrm{d}t.$$

On calcule à présent

$$\begin{aligned} c_n(\Phi) &= \int_0^1 \sum_{m\in\mathbb{Z}} \varphi(t+m)e^{-2\pi i n t}\mathrm{d}t \\ &= \sum_{m\in\mathbb{Z}} \int_m^{m+1} \varphi(t)e^{-2\pi i n(t-m)}\mathrm{d}t \\ &= \int_{\mathbb{R}} \varphi(t)e^{-2\pi i n t}\mathrm{d}t \\ &= \widehat{\varphi}(2\pi n). \end{aligned}$$

En évaluant (3.1) au point $t = 0$, on obtient donc bien le résultat voulu. $\square$

3.1.2 Exemples d'applications

Nous proposons dans ce paragraphe quelques applications de la formule sommatoire de Poisson.

Exemple 3.1.3. On a l'égalité

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2} = \pi \frac{e^{2\pi}+1}{e^{2\pi}-1}.$$

En effet, posons $\varphi(t) = 1/(1+t^2)$. On rappelle qu'on a montré au chapitre 2 que $\widehat{\varphi}(t) = \pi \exp(-|t|)$. On déduit alors du théorème 3.1.1

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{1+n^2} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \pi e^{-|2\pi n|} = \pi \left(1 + 2\frac{e^{-2\pi}}{1+e^{-2\pi}}\right) = \pi \frac{e^{2\pi}+1}{e^{2\pi}-1}.$$

Exercice 3.1.4. Montrer plus généralement que pour tout $\varepsilon > 0$ on a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\varepsilon^2+n^2} = -\frac{\pi}{2\varepsilon} - \frac{1}{2\varepsilon^2} + \frac{\pi}{\varepsilon}\frac{1}{1-e^{-2\pi\varepsilon}}$$

et en déduire que $\zeta(2) = \pi^2/6$.

Définition 3.1.5. La fonction $\theta : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{C}$ est définie par

$$\theta(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 x}, \quad x > 0.$$

Proposition 3.1.6. *La fonction θ satisfait l'équation fonctionnelle*

$$\theta\left(\frac{1}{x}\right) = \sqrt{x}\,\theta(x), \quad x > 0.$$

Cette identité nous permettra d'obtenir une équation fonctionnelle pour la fonction zêta de Riemann au paragraphe suivant.

Démonstration. On a

$$\theta(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} G_{\pi x}(n) \quad \text{où} \quad G_\alpha(t) = e^{-\alpha t^2}.$$

Par un calcul du chapitre 1, on a $\widehat{G_\alpha}(\lambda) = \sqrt{\pi/\alpha}\, G_{1/4\alpha}(\lambda)$. La formule sommatoire de Poisson donne alors

$$\theta(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \sqrt{\frac{\pi}{\pi x}} G_{1/4\pi x}(2\pi n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \sqrt{\frac{1}{x}}\, G_{\pi/x}(n) = \sqrt{\frac{1}{x}}\,\theta\left(\frac{1}{x}\right)$$

ce qui achève la démonstration. □

EXERCICE 3.1.7. Soit $N \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$. Déduire de la proposition 3.1.6 le développement

$$\theta(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{N} e^{-\pi n^2/x} + \mathcal{O}\left(e^{-\pi(N+1)^2/x} \right) \right)$$

quand $x \to 0$.

3.2 Le théorème de Shannon

Le résultat suivant nous dit que si un signal a une transformée de Fourier à support dans $[-\alpha, \alpha]$, alors on peut le reconstruire à partir de ses valeurs prises sur un ensemble discret, échelonné à fréquence α.

THÉORÈME 3.2.1 (Shannon). *Soient $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$ et $\alpha > 0$ vérifiant*

$$\operatorname{supp} \widehat{\varphi} \subset [-\alpha, \alpha].$$

Alors φ est continue et pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$\varphi(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \varphi\left(\frac{n\pi}{\alpha}\right) \operatorname{sinc}(t\alpha - n\pi).$$

Ici $\operatorname{sinc} \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$ est la fonction sinus cardinal donnée par $\operatorname{sinc} t = \sin(t)/t$.

Démonstration. On commence par le cas $\alpha = 1/2$ et on note $I = [-1/2, 1/2]$. Comme $\widehat{\varphi} \in L^2$ on peut écrire

$$\widehat{\varphi} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(\hat{\varphi}) e_{2\pi n} \tag{3.2}$$

où $e_{2\pi n}(\lambda) = \exp 2\pi i n \lambda$. Ici l'égalité a lieu dans $L^2(I)$. Comme $\operatorname{supp} \hat{\varphi} \subset I$, on a

$$c_n(\hat{\varphi}) = \int_I \varphi(\lambda) e^{-2\pi i n \lambda} \mathrm{d}\lambda = \int_{\mathbb{R}} \hat{\varphi}(\lambda) e^{-2\pi i n \lambda} \mathrm{d}\lambda = 2\pi \varphi(2\pi n).$$

Ici on a identifié $\varphi \in L^2$ avec $\mathcal{F}^{-1}(\hat{\varphi})$, qui est continue puisque $\hat{\varphi} \in L^1$, de sorte que la valeur $\varphi(2\pi n)$ a bien du sens. Notons que $\mathcal{F}^{-1}(\hat{\varphi})(t) = (2\pi)^{-1} \langle \hat{\varphi}, e_{-t} \rangle_{L^2(I)}$. En utilisant (3.2), on obtient

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(\hat{\varphi}) \langle e_{2\pi n}, e_{-t} \rangle_{L^2(I)} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \varphi(2\pi n) \operatorname{sinc}(t/2 - \pi n).$$

La série de fonctions $\sum_n \varphi(2\pi n) f_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$, où on a noté $f_n(t) = \operatorname{sinc}(t/2 - \pi n)$. En effet, on a

$$\left| \sum_{|n| \geqslant N} \varphi(2\pi n) f_n(t) \right|^2 \leqslant \left(\sum_{|n| \geqslant N} |\varphi(2\pi n)|^2 \right) \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n(t)^2 \right) \leqslant C \sum_{|n| \geqslant N} |\varphi(2\pi n)|^2$$

où $C = \sup_{t \in \mathbb{R}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n(t)^2 < \infty$ (la dernière série définit une fonction continue et 2π-périodique sur $\mathbb{R}$). Puisque $\hat{\varphi} \in L^2(I)$ on a $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(\hat{\varphi})|^2 < \infty$ de sorte que $\sum_{|n| \geqslant N} |\varphi(2\pi n)|^2 \to 0$ quand $N \to \infty$ et on en déduit la convergence uniforme de $\sum_n \varphi(2\pi n) f_n$ sur $\mathbb{R}$. On a montré le théorème pour $\alpha = 1/2$.

Si $\alpha > 0$ est quelconque, et $\operatorname{supp} \hat{\varphi} \subset [-\alpha, \alpha]$ alors on se ramène au cas précédent en considérant $\tilde{\varphi}(t) = \varphi(t/2\alpha)$, qui vérifie $\mathcal{F}\tilde{\varphi}(\lambda) = 2\alpha \hat{\varphi}(2\alpha\lambda)$ et donc $\operatorname{supp} \tilde{\varphi} \subset [-1/2, 1/2]$. On peut donc appliquer le résultat obtenu pour $\alpha = 1/2$, qui donne

$$\varphi(t/2\alpha) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \varphi(2\pi n/2\alpha) \operatorname{sinc}(t/2 - \pi n).$$

C'est bien l'identité attendue. $\square$

3.3 La fonction zêta de Riemann

Dans cette section nous utilisons les résultats obtenus dans les parties précédentes pour étudier la fonction zêta de Riemann, définie par

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \quad \operatorname{Re} s > 1.$$

En particulier, nous allons voir qu'elle admet un prolongement méromorphe à $\mathbb{C}$ et qu'elle vérifie une équation fonctionnelle ; nous en déduirons que ses zéros non triviaux sont dans la bande critique $\{s \in \mathbb{C} \ : \ 0 < \operatorname{Re} s < 1\}$. L'étude des zéros de ζ est intimement reliée à la distribution des nombres premiers.

3.3.1 La fonction Γ d'Euler

Pour $s \in \mathbb{C}_{>0}$ on pose

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} t^{s-1} e^{-t} \mathrm{d}t.$$

Par le théorème 1.3.1 d'holomorphie sous le signe intégral, la fonction Γ est holomorphe sur $\mathbb{C}_{>0}$.

Proposition 3.3.1 (Prolongement de la fonction Γ). *La fonction Γ admet un prolongement méromorphe à tout le plan complexe. Ses pôles sont simples et situés aux entiers négatifs ou nuls. De plus Γ ne s'annule jamais et on a*

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s), \quad s \in \mathbb{C} \setminus -\mathbb{N}.$$

Démonstration. On écrit pour $\operatorname{Re} s > 0$

$$\Gamma(s) = \int_0^1 t^{s-1} e^{-t} \mathrm{d}t + \int_1^\infty t^{s-1} e^{-t} \mathrm{d}t.$$

La fonction $s \mapsto \int_1^\infty t^{s-1} e^{-t} \mathrm{d}t$ est analytique sur tout le plan complexe par le théorème 1.3.1 d'holomorphie sous le signe intégral, car on a la borne

$$\left| t^{s-1} e^{-t} \right| = t^{(\operatorname{Re} s - 1)} e^{-t} \leqslant t^{A-1} e^{-t}, \quad t \geqslant 1, \quad \operatorname{Re} s \leqslant A,$$

pour tout $A \in \mathbb{R}$. Pour la deuxième intégrale, on développe e^{-t} en série entière pour obtenir, pour $s \in \mathbb{C}_{>0}$,

$$\int_0^1 t^{s-1} e^{-t} \mathrm{d}t = \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{k!} \int_0^1 t^{s-1+k} \mathrm{d}t = \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{k!} \frac{1}{s+k}.$$

La dernière somme définit clairement une fonction méromorphe de $s \in \mathbb{C}$, dont les pôles sont simples et situés aux points $s = -k$ avec $k \in \mathbb{N}$. L'équation fonctionnelle $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$ s'obtient par une intégration par parties. Pour montrer que Γ ne s'annule pas, on raisonne par l'absurde et on suppose que $\Gamma(s) = 0$ pour un $s \notin -\mathbb{N}$. L'équation fonctionnelle donne alors $\Gamma(s+k) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. On peut donc supposer $\operatorname{Re} s > 0$ et on obtient

$$\int_0^\infty t^{s-1} e^{-t} t^k \mathrm{d}t = 0, \quad k \in \mathbb{N}.$$

En appliquant le lemme 3.3.2 ci-dessous avec $f(t) = 1_{\mathbb{R}_+}(t) t^{s-1} e^{-t}$, on obtient une contradiction. $\square$

Lemme 3.3.2. *Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $\int_{\mathbb{R}} |f(t)| e^{\alpha |t|} \mathrm{d}t < \infty$ pour un certain $\alpha > 0$. On suppose de plus que tous les moments de f sont nuls,*

$$\int_{\mathbb{R}} f(t) t^k \mathrm{d}t = 0, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Alors $f = 0$.

Démonstration. Pour tout $z \in \mathbb{C}$ avec $|\operatorname{Re} z| < \alpha$, on pose

$$F(z) = \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{zt}\mathrm{d}t.$$

Pour un tel z, on a $|f(t)e^{zt}| \leqslant |f(t)|e^{\alpha|t|}$ donc par le théorème 1.3.1 on obtient que F est holomorphe sur l'ouvert $U_\alpha = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |\operatorname{Re} z| < \alpha\}$, et pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a

$$F^{(k)}(0) = \int_{\mathbb{R}} f(t)t^k\mathrm{d}t = 0.$$

Comme F est analytique elle est somme de sa série de Taylor, qui est nulle, donc F est nulle. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ on a $-i\lambda \in U_\alpha$ et on obtient

$$0 = F(-i\lambda) = \hat{f}(\lambda).$$

Par suite $\hat{f} = 0$ et donc $f = 0$ par le corollaire 2.2.6 sur l'injectivité de la transformée de Fourier. □

3.3.2 Produit eulérien

Proposition 3.3.3. *Pour tout $s \in \mathbb{C}_{>1}$ on a la formule*

$$\zeta(s) = \prod_{p \in \mathscr{P}} \left(1 - p^{-s}\right)^{-1} = \exp - \sum_{p \in \mathscr{P}} \log(1 - p^{-s}).$$

où $\mathscr{P}$ est l'ensemble des nombres premiers.

Ici $\log : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_- \to \mathbb{C}$ est la détermination principale du logarithme, qui est holomorphe et définie par

$$\log(\rho e^{i\theta}) = \log \rho + i\theta, \quad \rho > 0, \quad \theta \in \left]-\pi, \pi\right[.$$

Démonstration. On pose $f(s) = -\sum_p \log(1 - p^{-s})$. Pour $|z| < 1$ on a

$$-\log(1 - z) = z \sum_{n \geqslant 1} \frac{z^{n-1}}{n} = zg(z)$$

avec g analytique sur $D(0, 1)$. Pour $p \in \mathscr{P}$ et $s \in \mathbb{C}_{\geqslant \sigma}$ avec $\sigma > 1$ on a

$$|\log(1 - p^{-s})| \leqslant |g(p^{-s})|p^{-\sigma} \leqslant Cp^{-\sigma}$$

avec $C = \sup_{D(0,1/2)} |g|$. On en déduit que f est holomorphe sur $\mathbb{C}_{>1}$ par le théorème de Montel (cf. le théorème 1.3.3 et la remarque qui suit). Comme ζ est aussi holomorphe sur $\mathbb{C}_{>1}$, il suffit de montrer l'identité désirée pour $s = \sigma > 1$. On a

$$\prod_{p \leqslant N} \left(1 - p^{-\sigma}\right)^{-1} = \prod_{p \leqslant N} \sum_{k=0}^{\infty} p^{-k\sigma} = \sum_{n \in \mathcal{E}(N)} n^{-\sigma}$$

où $\mathcal{E}(N)$ est l'ensemble des entiers naturels qui n'admettent pour facteurs premiers que des nombres inférieurs ou égaux à N. Quand $N \to \infty$ le produit de gauche converge vers $\prod_p (1 - p^{-\sigma})$ tandis que la somme de droite converge vers $\zeta(s)$. □

Un corollaire immédiat est le suivant

Corollaire 3.3.4. *La fonction ζ ne s'annule pas sur $\mathbb{C}_{>1}$.*

Démonstration. En effet pour $s \in \mathbb{C}_{>1}$ on a $\zeta(s) = \exp - \sum_{p \in \mathscr{P}} \log(1 - p^{-s})$ par la proposition 3.3.3. □

3.3.3 Équation fonctionnelle pour ζ

Dans ce paragraphe nous montrons que ζ satisfait une équation fonctionnelle remarquable.

Définition 3.3.5. Pour tout $s \in \mathbb{C}$ avec $\operatorname{Re} s > 1$ on pose

$$\xi(s) = \frac{s(s-1)}{2\pi^{s/2}} \Gamma(s/2) \zeta(s).$$

Théorème 3.3.6 (Équation fonctionnelle de la fonction ζ). *La fonction ξ admet un prolongement analytique à tout le plan complexe, qui vérifie*

$$\xi(s) = \xi(1-s), \quad s \in \mathbb{C}.$$

Démonstration. Soit $s \in \mathbb{C}$ avec $\operatorname{Re} s > 1$. Un changement de variables donne, pour $n \geqslant 1$,

$$\Gamma(s/2) = \int_0^{\infty} t^{s/2-1} e^{-t} \mathrm{d}t = n^s \pi^{s/2} \int_0^{\infty} e^{-\pi n^2 u} u^{s/2-1} \mathrm{d}u.$$

On obtient

$$\pi^{-s/2} \zeta(s) \Gamma(s/2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi^{-s/2}}{n^s} \Gamma(s/2) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-\pi n^2 u} u^{s/2-1} \mathrm{d}u = \int_0^{\infty} \omega(u) u^{s/2-1} \mathrm{d}u \tag{3.3}$$

où on a noté

$$\omega(u) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 u}.$$

On a $2\omega(u)+1=\theta(u)$ où la fonction θ est définie au paragraphe 3.1.2. La proposition 3.1.6 donne alors pour $u>0$

$$\omega\left(\frac{1}{u}\right)=\frac{\theta\left(\frac{1}{u}\right)-1}{2}=\frac{\sqrt{u}\,\theta(u)-1}{2}=\sqrt{u}\,\omega(u)+\frac{\sqrt{u}-1}{2}. \tag{3.4}$$

Calculons à présent

$$\begin{aligned}\int_0^1 \omega(u)u^{s/2-1}\mathrm{d}u &= \int_1^\infty \omega\left(\frac{1}{v}\right)v^{-s/2+1}\frac{\mathrm{d}v}{v^2}\\ &= \int_1^\infty \sqrt{v}\,\omega(v)v^{-s/2+1}\frac{\mathrm{d}v}{v^2}+\int_1^\infty \frac{\sqrt{v}-1}{2}v^{-s/2+1}\frac{\mathrm{d}v}{v^2}\\ &= \int_1^\infty \omega(v)v^{-(s+1)/2}\mathrm{d}v+\frac{1}{2}\int_1^\infty\left(v^{-(s+1)/2}-v^{-s/2-1}\right)\mathrm{d}v.\end{aligned}$$

La dernière intégrale vaut $1/s(s-1)$. En injectant ceci dans (3.3), on obtient

$$\begin{aligned}\pi^{-s/2}\zeta(s)\Gamma(s/2) &= \int_0^1 \omega(u)u^{s/2-1}\mathrm{d}u+\int_1^\infty \omega(u)u^{s/2-1}\mathrm{d}u\\ &= \int_1^\infty \omega(u)\left(u^{-(s+1)/2}+u^{s/2-1}\right)\mathrm{d}u+\frac{1}{s(s-1)}\\ &= \int_1^\infty \omega(u)\left(u^{(1-s)/2}+u^{s/2}\right)\frac{\mathrm{d}u}{u}+\frac{1}{s(s-1)}.\end{aligned}$$

Finalement, on a obtenu

$$\xi(s)=\frac{s(s-1)}{2}\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s)=\frac{1}{2}+\frac{s(s-1)}{2}\int_1^\infty \omega(u)\left(u^{(1-s)/2}+u^{s/2}\right)\frac{\mathrm{d}u}{u}.$$

On pose maintenant

$$G(s)=\int_1^\infty \omega(u)u^{s/2}\frac{\mathrm{d}u}{u}.$$

Alors G est holomorphe sur $\mathbb{C}$, car on a l'estimée

$$\left|\omega(u)u^{s/2-1}\right|\leqslant \omega(u)u^{\sigma/2-1},\quad \operatorname{Re}s\leqslant\sigma,$$

pour tout $\sigma\in\mathbb{R}$. Notons que

$$\omega(u)\leqslant e^{-\pi u}\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\pi(n^2-1)}$$

pour tout $u\geqslant 1$. Il suit que $u\mapsto\omega(u)u^{\sigma/2-1}$ est intégrable sur $[1,\infty[$ pour tout $\sigma\in\mathbb{R}$. Par le théorème 1.3.1 d'holomorphie sous le signe intégral, on en déduit que G est analytique sur $\mathbb{C}_{\leqslant\sigma}$ pour tout $\sigma \in \mathbb{R}$, donc sur $\mathbb{C}$. Or on a montré l'égalité

$$\xi(s) = \frac{1}{2} + \frac{s(s-1)}{2}\left(G(s) + G(1-s)\right) \tag{3.5}$$

pour tout $s \in \mathbb{C}_{>1}$. Il suit que ξ a un prolongement analytique à $\mathbb{C}$, donné par le terme de droite de (3.5), et on a clairement $\xi(s) = \xi(1-s)$. □

3.3.4 Zéros de la fonction ζ

En utilisant l'équation fonctionnelle, nous allons montrer le résultat suivant.

Théorème 3.3.7 (Zéros de la fonctions ζ). *La fonction ζ admet un prolongement méromorphe à $\mathbb{C}$, avec un unique pôle simple de résidu* 1 *au point $s = 1$. Ses zéros sont divisés en deux catégories :*

(i) *les zéros* triviaux, *situés aux points $s = -2n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$;*

(ii) *les zéros* non triviaux, *situés dans la bande critique* $\{s \in \mathbb{C} \ : \ 0 < \operatorname{Re} s < 1\}$.

On commence par un résultat intermédiaire, qui dit que ζ ne s'annule pas sur la droite critique $\{\operatorname{Re} s = 1\}$.

Proposition 3.3.8. *La fonction ζ a un unique pôle simple en $s = 1$ de résidu* 1, *et $\zeta(1+it) \neq 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}^*$.*

Démonstration. Là où cela a du sens, on a

$$\zeta(s) = \frac{2\pi^{s/2}\xi(s)}{s(s-1)\Gamma(s/2)}.$$

Comme Γ ne s'annule pas, on voit que les pôles de ζ sont contenus dans $\{0, 1\}$. Par ailleurs, la formule (3.5) donne $\xi(1) = 1/2$, d'où l'on tire que

$$\zeta(s) \sim_{s\to 1} \frac{\pi^{1/2}}{\Gamma(1/2)} \frac{1}{s-1}.$$

Il suit que ζ a un pôle simple en $s = 1$, de résidu $\sqrt{\pi}/\Gamma(1/2) = 1$ — en effet, le changement de variable $t = u^2$ donne

$$\Gamma(1/2) = \int_{\mathbb{R}_+} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = 2\int_0^\infty e^{-u^2}\mathrm{d}u = \sqrt{\pi}.$$

On a vu que $1 + it$ n'est pas un pôle de ζ si $t \neq 0$. Montrons que $\zeta(1+it) \neq 0$. Pour tout $s \in \mathbb{C}_{>1}$ on a $\zeta(s) = \exp -\sum_p \log(1-p^{-s})$ d'où

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\sum_p \log(1-p^{-s}) = \sum_p \frac{\log(p)p^{-s}}{1-p^{-s}} = \sum_p \log(p)\sum_{k=1}^{\infty} p^{-ks}$$

ce qui s'écrit encore
$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}=\sum_{n=1}^{\infty}\Lambda(n)n^{-s}$$
où $\Lambda(n)=\log(p)$ si $n=p^k$ avec $p\in\mathscr{P}$ et $k\geqslant 1$, et $\Lambda(n)=0$ sinon. En écrivant $s=\sigma+it$ avec $\sigma>1$ et $t\in\mathbb{R}$, on obtient
$$-\operatorname{Re}\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}=\sum_{n=1}^{\infty}\Lambda(n)n^{-\sigma}\cos(t\log n).$$
Pour tout $\theta\in\mathbb{R}$, remarquons que
$$0\leqslant 2(1+\cos\theta)^2=3+4\cos\theta+\cos(2\theta).$$
Pour $\theta=t\log n$ on obtient
$$\begin{aligned}0&\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\Lambda(n)n^{-\sigma}\left(3+4\cos(t\log n)+\cos(2t\log n)\right)\\&=-\operatorname{Re}\left(\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma)+4\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma+it)+3\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma+2it)\right).\end{aligned}$$
La proposition 1.2.4 donne alors
$$\begin{aligned}0&\leqslant-\lim_{\sigma\to1}(\sigma-1)\operatorname{Re}\left(3\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma)+4\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma+it)+\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma+2it)\right)\\&=3n(\zeta,1)-4n(\zeta,1+it)-n(\zeta,1+2it).\end{aligned}$$
Puisque ζ a un pôle simple au point $\zeta=1$, on a $n(\zeta,1)=-1$ et on en déduit que
$$4n(\zeta,1+it)+n(\zeta,1+2it)\leqslant 3. \tag{3.6}$$
Comme $1+it$ et $1+2it$ ne sont pas des pôles de ζ, les nombres $n(\zeta,1+it)$ et $n(\zeta,1+2it)$ sont positifs ou nuls. On en déduit que $n(\zeta,1+it)\leqslant 3/4$ par (3.6). Comme $n(\zeta,1+it)\in\mathbb{Z}$ on obtient $n(\zeta,1+it)=0$ et donc $1+it$ n'est pas un zéro de ζ. Ceci conclut la démonstration. □

On peut maintenant démontrer le résultat sur la localisation des zéros de la fonction ζ.

Démonstration du théorème 3.3.7. L'équation fonctionnelle pour ζ se ré-écrit
$$\zeta(1-s)=\frac{\pi^{1/2-s}\Gamma(s/2)}{\Gamma((1-s)/2)}\zeta(s). \tag{3.7}$$

Étudions d'abord les zéros de ζ. Le corollaire 3.3.4 ζ ne s'annule pas sur $\mathbb{C}_{>1}$. Comme Γ n'a pas de zéros, on a la propriété suivante. Pour tout $s \in \mathbb{C}_{>1}$, le nombre $1-s$ est un zéro de ζ si et seulement si $(1-s)/2$ est un pôle de Γ, ce qui équivaut à $(1-s)/2 \in -\mathbb{N}^*$ ou encore $1-s \in -2\mathbb{N}^*$. Ainsi

$$\{s \in \mathbb{C} \ : \ \zeta(s) = 0, \operatorname{Re} s < 0\} = \{-2n \ : \ n \in \mathbb{N}^*\}.$$

Ce sont les zéros triviaux. Étudions à présent les zéros de ζ dans $\mathbb{C}_{[0,1]}$. La fonction Γ a un pôle simple en $s = 0$ de résidu 1 donc (3.7) implique que ζ est régulière en $s = 0$, i.e. n'a ni pôle ni zéro. En fait on peut calculer

$$\zeta(1-s) \sim_{s \to 1} \pi^{-1/2}\Gamma(1/2)\frac{s-1}{2/(1-s)} \to_{s \to 1} -1/2.$$

Enfin, si $t \in \mathbb{R}^*$, on a $\zeta(1+it) \neq 0$ par la proposition 3.3.8, donc (3.7) implique que $\zeta(it) \neq 0$. Par conséquent les zéros de ζ dans $\mathbb{C}_{[0,1]}$ sont en fait contenus dans $\mathbb{C}_{]0,1[}$. La proposition 3.3.8 nous dit que le seul pôle de ζ est en $s = 1$ et qu'il est simple avec résidu 1. Ceci conclut la démonstration. □

Chapitre 4

Distributions tempérées

Ce chapitre est consacré aux distributions tempérées. Nous introduisons d'abord l'espace de Schwartz, c'est-à-dire l'espace des fonctions à décroissance rapide, et précisons sa topologie. Nous définissons ensuite les distributions tempérées (l'espace dual des fonctions à décroissance rapide), et donnons quelques exemples. Enfin, nous montrons quelques propriétés vérifiées par les distributions. Pour ce chapitre les références [4, 7] peuvent être utiles.

Sommaire

4.1 Fonctions lisses à décroissance rapide 48
- 4.1.1 L'espace de Schwartz 48
- 4.1.2 Topologie de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ 48
- 4.1.3 Transformée de Fourier sur $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ 50

4.2 Distributions tempérées 51
- 4.2.1 Définition et caractérisation 51
- 4.2.2 Théorème de Banach–Steinhaus 52

4.3 Exemples 54
- 4.3.1 Fonctions comme distributions 54
- 4.3.2 La distribution de Dirac 56
- 4.3.3 Fonctions oscillantes 56

4.4 Opérations sur les distributions tempérées 57
- 4.4.1 Support d'une distribution 57
- 4.4.2 Multiplication d'une distribution par une fonction 59
- 4.4.3 Différentiation des distributions 60
- 4.4.4 Produit de convolution sur $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \times \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ 62
- 4.4.5 Produit de convolution sur $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n) \times \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ 63
- 4.4.6 Transformation de Fourier sur $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ 67

4.1 Fonctions lisses à décroissance rapide

4.1.1 L'espace de Schwartz

Définition 4.1.1. On note $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, ou plus simplement $\mathscr{S}$, l'espace des fonctions *de classe Schwartz* sur $\mathbb{R}^n$, ou *à décroissance rapide*,

$$\mathscr{S}(\mathbb{R}^n) = \{\varphi \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n) \ : \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n, \quad p_{\alpha,\beta}(\varphi) < \infty\}$$

où pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ et toute $\varphi \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ on a noté

$$p_{\alpha,\beta}(\varphi) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left| x^\alpha \partial_x^\beta \varphi(x) \right|.$$

On notera, pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$\mathrm{p}_N(\varphi) = \sum_{|\alpha|, |\beta| \leqslant N} p_{\alpha,\beta}(\varphi),$$

et plus généralement, si $m \in \mathbb{N}$,

$$\mathrm{p}_{N,m}(\varphi) = \sum_{|\alpha| \leqslant N} \sum_{|\beta| \leqslant m} p_{\alpha,\beta}(\varphi).$$

Remarque 4.1.2. Il n'est pas dur de vérifier que $\mathscr{S}$ est l'espace des fonctions lisses sur $\mathbb{R}^n$ telles que pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ on a

$$x^\alpha \partial^\beta \varphi(x) \underset{|x| \to \infty}{\longrightarrow} 0.$$

4.1.2 Topologie de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$

Définition 4.1.3. On dit qu'une suite (φ_k) converge vers φ dans $\mathscr{S}$ si et seulement si pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a $\mathrm{p}_N(\varphi - \varphi_k) \to 0$ quand $k \to \infty$. On écrit alors

$$\varphi_k \underset{\mathscr{S}}{\longrightarrow} \varphi.$$

Cette notion de convergence coïncide avec la convergence usuelle dans un espace métrique, comme le montre le résultat suivant.

Théorème 4.1.4. *L'espace $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, muni de la distance*

$$\mathrm{d}(\varphi, \psi) = \sum_{N=0}^{\infty} 2^{-N} \frac{\mathrm{p}_N(\varphi - \psi)}{1 + \mathrm{p}_N(\varphi - \psi)},$$

est un espace métrique complet. Si (φ_k) est une suite de $\mathscr{S}$, alors $\varphi_k \underset{\mathscr{S}}{\longrightarrow} \varphi$ si et seulement si $\varphi_k \to \varphi$ dans $(\mathscr{S}, \mathrm{d})$.

Remarque 4.1.5. Le résultat précédent dit qu'une suite (φ_k) est de Cauchy dans $(\mathscr{S}, \mathrm{d})$ si, et seulement si, pour tout $N \in \mathbb{N}$, $\mathrm{p}_N(\varphi_k - \varphi_\ell) \to 0$ quand $k, \ell \to \infty$.

Démonstration. Le fait que d est une distance sur $\mathscr{S}$ est laissé en exercice au lecteur. Montrons que $(\mathscr{S}, \mathrm{d})$ est complet. Soit (φ_k) une suite de Cauchy dans $(\mathscr{S}, \mathrm{d})$. Soit $N \in \mathbb{N}$ et $r > 0$. Alors $\mathrm{d}(\varphi_k, \varphi_\ell) \to_{k,\ell\to\infty} 0$ implique que pour tout $N \in \mathbb{N}$ on a

$$\frac{\mathrm{p}_N(\varphi_k - \varphi_\ell)}{1 + \mathrm{p}_N(\varphi_k - \varphi_\ell)} \to 0,$$

et donc $\mathrm{p}_N(\varphi_k - \varphi_\ell) \to 0$, quand $k, \ell \to \infty$. En particulier pour tout $r > 0$ on a

$$\|\varphi_k - \varphi_\ell\|_{\mathscr{C}^N([-r,r]^n)} \leqslant \mathrm{p}_N(\varphi_k - \varphi_\ell) \to 0$$

quand $k, \ell \to \infty$, donc la suite (φ_k) est de Cauchy dans $\mathscr{C}^N([-r, r]^n)$. Ces espaces étant complets pour la norme

$$\|\psi\|_{\mathscr{C}^N([-r,r]^n)} = \sum_{|\beta|\leqslant N} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |\partial_x^\beta \psi(x)|,$$

on en déduit que (φ_k), ainsi que toutes ses dérivées, convergent uniformément sur $\mathbb{R}^n$. On note $\varphi \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ la limite. Soit $r > 0$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ avec $|\alpha|, |\beta| \leqslant N$. Pour tous k, ℓ assez grands, on a $\mathrm{p}_N(\varphi_k - \varphi_\ell) \leqslant 1$. En particulier, si ℓ est assez grand, on a par convergence uniforme

$$\sup_{x\in[-r,r]^n} \left|x^\alpha \partial_x^\beta(\varphi - \varphi_\ell)\right| = \lim_k \sup_{x\in[-r,r]^n} \left|x^\alpha \partial_x^\beta(\varphi_k - \varphi_\ell)\right| \leqslant \limsup_k \mathrm{p}_N(\varphi_k - \varphi_\ell) \leqslant 1.$$

Ceci étant vrai pour tout $r > 0$, on obtient $\mathrm{p}_N(\varphi) \leqslant \mathrm{p}_N(\varphi - \varphi_\ell) + \mathrm{p}_N(\varphi_\ell) < \infty$. Ainsi $\varphi \in \mathscr{S}$ et $(\mathscr{S}, \mathrm{d})$ est complet.

Si $\mathrm{d}(\varphi_k, \varphi) \to 0$ alors pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a $\mathrm{p}_N(\varphi-\varphi_k)/(1+\mathrm{p}_N(\varphi-\varphi_k)) \to 0$ donc $\mathrm{p}_N(\varphi - \varphi_k) \to 0$. Réciproquement si $\mathrm{p}_N(\varphi - \varphi_k) \to 0$ pour tout N alors $\mathrm{d}(\varphi, \varphi_k) \to 0$ par convergence normale. □

Remarque 4.1.6. Un sous-ensemble A de $(\mathscr{S}, \mathrm{d})$ est ouvert si, et seulement si, pour toute $\varphi \in A$, il existe $N \in \mathbb{N}$ et $\delta > 0$ tels que

$$\{\psi \in \mathscr{S} \ : \ \mathrm{p}_N(\varphi - \psi) < \delta\} \subset A.$$

En effet, il suffit de montrer que pour toute φ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ et $\delta, \eta > 0$ tels que

$$B_{\mathscr{S}}(\varphi, \eta) \subset \{\psi \in \mathscr{S} \ : \ \mathrm{p}_N(\varphi - \psi) < \delta\} \subset B_{\mathscr{S}}(\varphi, \varepsilon),$$

où $B_{\mathscr{S}}(\varphi, r)$ est la boule ouverte de rayon r centrée en φ de $(\mathscr{S}, \mathrm{d})$. Il n'est pas trop dur de voir que la deuxième inclusion a lieu dès que

$$2^{-N} < \varepsilon/2 \quad \text{et} \quad \delta < \varepsilon/2$$

tandis que la première est satisfaite quand

$$\frac{2^N \eta}{1 - 2^N \eta} < \delta.$$

4.1.3 Transformée de Fourier sur $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$

Notons que pour toute fonction de Schwarz $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ on a $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ puisqu'on a l'estimée

$$|\varphi(x)| \leqslant p_{n+1}(\varphi) \langle x \rangle^{-(n+1)}, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

et le fait que l'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}^n} \langle x \rangle^{-(n+1)} \mathrm{d}x$$

soit absolument convergente. En particulier, la transformation de Fourier est bien définie sur l'espace de Schwarz. On a en fait beaucoup mieux, comme le montre le résultat suivant.

Théorème 4.1.7 (Continuité de la transformation de Fourier sur $\mathscr{S}'$). *Pour toute $\varphi \in \mathscr{S}$, on a $\widehat{\varphi} \in \mathscr{S}$. De plus, pour tout $N \in \mathbb{N}^n$, il existe $C = C_{n,N}$ ne dépendant que de N et n telle que*

$$p_N(\widehat{\varphi}) \leqslant C\, p_{N+n+1}(\varphi), \quad \varphi \in \mathscr{S}. \tag{4.1}$$

En fait, pour tous N, m on a $C = C_{n,N,m}$ telle que

$$p_{N,m}(\widehat{\varphi}) \leqslant C\, p_{m+n+1,N}(\varphi), \quad \varphi \in \mathscr{S}. \tag{4.2}$$

Corollaire 4.1.8. *La transformation de Fourier réalise un isomorphisme continu*

$$\mathcal{F} : \mathscr{S} \to \mathscr{S}.$$

Démonstration. Le théorème précédent implique que $\mathcal{F}$ est continu sur $\mathscr{S}$. Il suffit donc de montrer que $\mathcal{F}^{-1}$ envoie $\mathscr{S}$ sur $\mathscr{S}$ continûment. Pour cela, on écrit simplement $\mathcal{F}^{-1} = (2\pi)^{-n} \mathcal{J} \mathcal{F}$. Puisque $\mathcal{J}$ est une isométrie de $\mathcal{S}$ (au sens où $p_{\alpha,\beta}(\mathcal{J}\varphi) = p_{\alpha,\beta}(\varphi)$ pour tous α, β et $\varphi \in \mathscr{S}$), on obtient que l'estimée (4.2) est aussi valide en remplaçant $\mathcal{F}$ par $\mathcal{F}^{-1}$ et $C_{N,n}$ par $(2\pi)^{-n} C_{N,n}$. Ceci conclut la démonstration. □

Remarque 4.1.9. La démonstration qui va suivre du théorème 4.1.7 va nous montrer plus précisément que pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$, on a $C_{n,\alpha,\beta}$ telle que

$$p_{\alpha,\beta}(\widehat{\varphi}) \leqslant C_{n,\alpha,\beta} \sum_{|\widetilde{\gamma}| \leqslant n+1} \sum_{\gamma \leqslant \alpha, \beta} p_{\beta - \gamma + \widetilde{\gamma},\, \alpha - \gamma}(\varphi), \quad \varphi \in \mathscr{S}. \tag{4.3}$$

Ici, la deuxième somme porte sur les multi-indices $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n) \in \mathbb{N}^n$ tels que $\gamma_j \leqslant \alpha_j$ et $\gamma_j \leqslant \beta_j$ pour tout $j = 1, \ldots, n$.

Démonstration du théorème 4.1.7. Soit $\varphi \in \mathscr{S}$. Le théorème de dérivation sous le signe intégral nous permet d'affirmer que $\widehat{\varphi} \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ avec

$$\partial_\xi^\beta \widehat{\varphi}(\xi) = \widehat{(-ix)^\beta f}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Par suite la proposition 2.1.14 nous donne

$$\xi^\alpha \partial_\xi^\beta \widehat{\varphi}(\xi) = i^{-|\alpha|} \widehat{\partial_x^\alpha \{(-ix)^\beta \varphi\}}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^n,$$

et on obtient

$$p_{\alpha,\beta}(\widehat{\varphi}) = \|\mathcal{F}\left(\partial_x^\alpha\{x^\beta f\}\right)\|_{L^\infty} \leqslant \|\partial_x^\alpha(x^\beta \varphi)\|_{L^1}.$$

Maintenant, on écrit

$$\partial_x^\alpha(x^\beta \varphi(x)) = \sum_{\gamma \leqslant \alpha,\beta} c_\gamma x^{\beta-\gamma} \partial_x^{\alpha-\gamma}\varphi(x).$$

Enfin, rappelons que pour toute fonction ψ on a

$$\|\psi\|_{L^1} \leqslant c_n \|\langle x\rangle^{n+1}\psi\|_\infty$$

où $c_n = \int_{\mathbb{R}^n} \langle x\rangle^{-(n+1)} \mathrm{d}x$. D'autre part, si $d > 0$ vérifie $\|y\|_2 \leqslant d\|y\|_1$ pour tout $y \in \mathbb{R}^{n+1}$, on a

$$\langle x\rangle^{(n+1)} \leqslant d^{n+1}(1 + |x_1| + \cdots + |x_n|)^{n+1} = \sum_{|\widetilde{\gamma}| \leqslant n+1} \widetilde{c}_\gamma |x^\gamma|$$

où les constantes $\widetilde{\gamma}$ ne dépendent que de $\widetilde{\gamma}$ et n. Ici on a utilisé que $\langle x\rangle = \|y\|_2$ où $y = (1, x_1, \ldots, x_n)$. Ceci combiné à ce qui précède nous donne (4.3), et le théorème 4.1.7 suit. $\square$

4.2 Distributions tempérées

4.2.1 Définition et caractérisation

Définition 4.2.1. Une *distribution tempérée* sur $\mathbb{R}^n$ est par définition une forme linéaire $\mathscr{S} \to \mathbb{C}$ qui est séquentiellement continue. Autrement dit, une application linéaire $u : \mathscr{S} \to \mathbb{C}$ est une distribution tempérée si pour toute suite (φ_k) de $\mathscr{S}$ qui converge vers $\varphi \in \mathscr{S}$, on a

$$\lim_{k\to\infty} u(\varphi_k) = u(\varphi).$$

On désigne par $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$, ou plus simplement par $\mathscr{S}'$, l'espace des distributions tempérées sur $\mathbb{R}^n$.

Dans la suite, on notera aussi

$$\langle u, \varphi \rangle = u(\varphi), \quad u \in \mathscr{S}', \quad \varphi \in \mathscr{S},$$

le crochet de dualité.

PROPOSITION 4.2.2. *Soit $u : \mathscr{S} \to \mathbb{C}$ une forme linéaire. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) *u est une distribution tempérée ;*

(ii) *u est continue $(\mathscr{S}, \mathrm{d}) \to \mathbb{R}$;*

(iii) *il existe $N \in \mathbb{N}$ et $C > 0$ tels que*

$$|\langle u, \varphi \rangle| \leqslant C \mathrm{p}_N(\varphi), \quad \varphi \in \mathscr{S}. \tag{4.4}$$

Démonstration. Notons d'abord que les points (i) et (ii) sont clairement équivalents puisque la convergence dans $\mathscr{S}$ équivaut à la convergence dans l'espace métrique $(\mathscr{S}, \mathrm{d})$ où la caractérisation séquentielle de la continuité est valide.

Supposons à présent (4.4) vérifiée pour un $N \in \mathbb{N}$. Soit (φ_k) qui converge vers φ dans $\mathscr{S}$. Alors $\mathrm{p}_N(\varphi_k - \varphi) \to 0$, d'où $u(\varphi_k) \to u(\varphi)$ par (4.4). Donc $u \in \mathscr{S}'$. Réciproquement, soit $u \in \mathscr{S}'$. Raisonnons par l'absurde et supposons que (ii) n'est pas vérifiée. Dès lors il existe une suite (φ_k) de $\mathscr{S}$ telle que

$$|\langle u, \varphi_k \rangle| > k p_k(\varphi_k)$$

pour tout $k \in \mathbb{N}$. En posant $\tilde{\varphi}_k = \varphi_k / k p_k(\varphi_k)$ on a $p_k(\tilde{\varphi}_k) = 1/k$ d'où l'on tire que $\tilde{\varphi}_k \to 0$ dans $\mathscr{S}$ (en effet si $N \in \mathbb{N}$ et $k \geqslant N$ on a $\mathrm{p}_N(\tilde{\varphi}_k) \leqslant p_k(\tilde{\varphi}_k)$). Ainsi, comme u est un élément de $\mathscr{S}'$, on a $u(\tilde{\varphi}_k) \to 0$ quand $k \to \infty$. Or on a $|\langle u, \tilde{\varphi}_k \rangle| > 1$, ce qui est absurde. □

4.2.2 Théorème de Banach–Steinhaus

Pour tous $N, d, m \in \mathbb{N}$, on note

$$\mathrm{p}_N^*(u) = \sup_{\varphi \in \mathscr{S} \setminus \{0\}} \frac{|\langle u, \varphi \rangle|}{\mathrm{p}_N(\varphi)} \quad \text{et} \quad \mathrm{p}_{d,m}^*(u) = \sup_{\varphi \in \mathscr{S} \setminus \{0\}} \frac{|\langle u, \varphi \rangle|}{\mathrm{p}_{d,m}(\varphi)}$$

La *tempérance* d'une distribution tempérée u est l'entier

$$\nu(u) = \inf\{N \in \mathbb{N} \ : \ \mathrm{p}_N^*(u) < \infty\},$$

qui est bien défini par la proposition 4.2.2. On définit aussi

$$m(u) = \inf\{m \in \mathbb{N} \ : \ \mathrm{p}_{N,m}^*(u) < \infty\} \quad \text{et} \quad d(u) = \inf\{m \in \mathbb{N} \ : \ \mathrm{p}_{d,N}^*(u) < \infty\}$$

où $N = \nu(u)$. Si $d(u) = 0$ (resp. $m(u) = 0$), on dit que u est *d'ordre* N (resp. *de degré* N).

Théorème 4.2.3 (Banach-Steinhaus). *Soit (u_k) une suite de formes linéaires continues $\mathscr{S} \to \mathbb{C}$ qui est faiblement bornée, au sens où pour toute $\varphi \in \mathscr{S}$, la suite $(u_k(\varphi))$ est bornée. Alors il existe $N \in \mathbb{N}$ et $C > 0$ tels que pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a*

$$\mathrm{p}_N^*(u_k) \leqslant C.$$

Démonstration. Pour tout $K \in \mathbb{N}$ on note

$$E_K = \{\varphi \in \mathscr{S} \;:\; \forall k \in \mathbb{N},\ |\langle u_k, \varphi\rangle| \leqslant K\}.$$

Il suit de la continuité des u_k que les E_K sont fermés. Or $\mathscr{S} = \bigcup_{K=0}^{\infty} E_K$ par hypothèse, et comme $(\mathscr{S}, \mathrm{d})$ est complet, le théorème de Baire implique qu'il existe un entier K tel que E_K est d'intérieur non vide. Cela signifie qu'il existe $\varphi \in \mathscr{S}$ et $\varepsilon > 0$ tels que pour tout $\psi \in \mathscr{S}$,

$$\mathrm{d}(\varphi, \psi) < \varepsilon \quad \Longrightarrow \quad \sup_k |\langle u_k, \psi\rangle| \leqslant K.$$

Soient maintenant $N \in \mathbb{N}$ et $\delta > 0$ vérifiant

$$\sum_{M=N+1}^{\infty} 2^{-M} < \varepsilon/2 \quad \text{et} \quad \sum_{M=0}^{N} 2^{-M}\delta < \varepsilon/2.$$

Alors pour tout $\psi \in \mathscr{S}$ tel que $\mathrm{p}_N(\varphi - \psi) < \delta$, on a $\mathrm{d}(\varphi, \psi) < \varepsilon$ d'où l'on tire $\sup_k |\langle u_k, \psi\rangle| \leqslant K$. En particulier, si $\mathrm{p}_N(\phi) < \delta$ on a pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$|\langle u_k, \phi\rangle| \leqslant |\langle u_k, \varphi + \phi\rangle| \;+ |\langle u_k, \varphi\rangle| \leqslant K + \sup_k |\langle u_k, \varphi\rangle|.$$

Par homogénéité de p_N on obtient finalement, pour tout $\phi \in \mathscr{S}$ et $k \in \mathbb{N}$,

$$|\langle u_k, \phi\rangle| \leqslant C\mathrm{p}_N(\phi)$$

où $C = \delta^{-1}\left(K + \sup_k |\langle u_k, \varphi\rangle|\right)$. Cela conclut la démonstration. □

Proposition–Définition 4.2.4. *On dit qu'une suite (u_k) de $\mathscr{S}'$ converge (dans $\mathscr{S}'$) si pour toute fonction $\varphi \in \mathscr{S}$, la suite $(\langle u_k, \varphi\rangle)_k$ converge. La forme linéaire $u : \mathscr{S} \to \mathbb{C}$ définie par*

$$\langle u, \varphi\rangle = \lim_k \langle u_k, \varphi\rangle, \quad \varphi \in \mathscr{S},$$

définit alors une distribution tempérée, et on écrit $u_k \underset{\mathscr{S}'}{\longrightarrow} u$.

Démonstration. Le théorème précédent implique qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ et $C > 0$ tels que $\mathrm{p}_N^*(u_k) \leqslant C$ pour tout k. On obtient donc, pour tout $\varphi \in \mathscr{S}$,

$$|\langle u, \varphi\rangle| = \lim_k |\langle u_k, \varphi\rangle| \leqslant C\mathrm{p}_N(\varphi).$$

Ainsi $u \in \mathscr{S}'$ par la proposition 4.2.2. □

On conclut cette section par le résultat suivant qui sera utile en pratique.

Corollaire 4.2.5 (Continuité du crochet de dualité). *Supposons que* $u_k \to u$ *dans* $\mathscr{S}'$ *et que* $\varphi_k \to \varphi$ *dans* $\mathscr{S}$. *Alors* $\langle u_k, \varphi_k\rangle \to \langle u, \varphi\rangle$.

Démonstration. En effet, on a

$$|\langle u_k, \varphi_k\rangle - \langle u, \varphi\rangle| \leqslant |\langle u_k, \varphi_k - \varphi\rangle| + |\langle u_k, \varphi\rangle - \langle u, \varphi\rangle|.$$

Puisque $u_k \to u$ dans $\mathscr{S}'$, on a $|\langle u_k, \varphi\rangle - \langle u, \varphi\rangle| \to 0$. D'autre part, le théorème nous dit qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ et $C > 0$ tels que $\mathrm{p}_N^*(u_k) \leqslant C$ pour tout k. On obtient donc

$$|\langle u_k, \varphi_k - \varphi\rangle| \leqslant C\mathrm{p}_N(\varphi_k - \varphi) \to 0$$

car $\varphi_k \to \varphi$ dans $\mathscr{S}$. □

4.3 Exemples

Avant d'aller plus loin, présentons quelques exemples de distributions tempérées.

4.3.1 Fonctions comme distributions

Certaines fonctions peuvent être vues comme des distributions tempérées. On a une inclusion $\mathscr{S} \hookrightarrow \mathscr{S}'$, qui à une fonction $\varphi \in \mathscr{S}$ associe la forme linéaire $u_\varphi : \mathscr{S} \to \mathbb{C}$ définie par

$$u_\varphi : \psi \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} \varphi\psi. \tag{4.5}$$

L'application $\mathscr{S} \to \mathscr{S}'$, $\varphi \mapsto u_\varphi$ est injective : si $u_\varphi = 0$, alors en particulier

$$0 = u_\varphi(\overline{\varphi}) = \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi|^2$$

ce qui implique $\varphi = 0$. On dit qu'une distribution tempérée $u \in \mathscr{S}'$ *appartient à* $\mathscr{S}$ s'il existe $\varphi \in \mathscr{S}$ telle que $u = u_\varphi$. Dans la suite on confondra souvent abusivement la fonction φ et la distribution associée u_φ.

De manière générale, si φ est une fonction on peut se demander quand est-ce que l'application u_φ donnée par (4.5) donne lieu à un élément de $\mathscr{S}'$. La proposition suivante montre que si la fonction φ ne croît pas trop vite à l'infini, alors elle définit automatiquement une distribution tempérée.

Proposition 4.3.1. *Si on a* $\varphi \in \langle x\rangle^q L^1(\mathbb{R}^n)$ *pour un certain* $q \in \mathbb{N}$, *alors l'application* u_φ *donnée par* (4.5) *définit un élément de* $\mathscr{S}'$. *De plus, l'application* $\langle x\rangle^q L^1(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{S}'$, $\varphi \mapsto u_\varphi$, *est injective.*

Ici, $\langle x\rangle^q L^1(\mathbb{R}^n)$ est l'espace des (classes d'équivalence de) fonctions mesurables φ telles que $x \mapsto \langle x\rangle^{-q}\varphi(x)$ appartient à $L^1(\mathbb{R}^n)$.

Démonstration. Traitons d'abord le cas $q = 0$. Pour toute fonction $\psi \in \mathscr{S}$, on a

$$|u_\varphi(\psi)| \leqslant \|\varphi\|_{L^1}\|\psi\|_{L^\infty} \leqslant \|\varphi\|_{L^1} p_0(\psi)$$

d'où l'on tire que $u_\varphi \in \mathscr{S}'$ avec $p_0^*(u_\varphi) \leqslant \|\varphi\|_{L^1}$.

Si $q > 0$, on se ramène au cas précédent en remarquant simplement que

$$|u_\varphi(\psi)| = |u_{\langle x\rangle^{-q}\varphi}(\langle x\rangle^q\psi)| \leqslant \|\langle x\rangle^{-q}\varphi\|_{L^1}\|\langle x\rangle^q\psi\|_{L^\infty}$$

pour toute fonction $\psi \in \mathscr{S}$.

Montrons finalement l'injectivité de $\varphi \mapsto u_\varphi$. Soit $\varphi \in \langle x\rangle^q L^1(\mathbb{R}^n)$ telle que $u_\varphi = 0$ dans $\mathscr{S}'$. Pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$ on note $\psi_\xi : x \mapsto \exp(-|x|^2 - ix\cdot\xi)$. Alors pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$ la fonction ψ_ξ est dans $\mathscr{S}$ et donc

$$0 = \langle u_\varphi, \psi_\xi\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)e^{-|x|^2}e^{-ix\cdot\xi}\mathrm{d}x.$$

Ainsi, la fonction $\phi : x \mapsto \varphi(x)e^{-|x|^2}$, qui est dans L^1 car

$$\int |\varphi(x)|e^{-|x|^2}\mathrm{d}x \leqslant \left(\int |\varphi(x)|\langle x\rangle^{-q}\mathrm{d}x\right)\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\langle x\rangle^q e^{-|x|^2} < \infty,$$

a une transformée de Fourier nulle. Par suite ϕ est nulle, donc φ aussi. □

Exemple 4.3.2. (i) Les fonctions polynomiales de $x_1, \dots, x_n$ sont des distributions tempérées.

(ii) La fonction $x \mapsto \log|x|$ est une distribution tempérée sur $\mathbb{R}^n$.

De manière générale, supposons que E est une espace de fonctions sur $\mathbb{R}^n$ contenant $\mathscr{S}$, tel que l'application $\mathscr{S} \hookrightarrow \mathscr{S}'$, $\varphi \mapsto u_\varphi$, admet un prolongement à une application injective $E \hookrightarrow \mathscr{S}'$. Alors on dira abusivement qu'une distribution $u \in \mathscr{S}'$ *est un élément de* E, ce que l'on notera $u \in E$, si $u = u_\varphi$ pour un certain $\varphi \in E$.

Remarque 4.3.3. Il existe des fonctions lisses qui ne sont pas des distributions tempérées. On peut montrer en effet que si $\varphi(x) = \exp|x|^2$, alors l'application $\mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$ définie par $\psi \mapsto \int \varphi\psi$ n'admet aucune extension à une application continue $\mathscr{S} \to \mathbb{C}$.

4.3.2 La distribution de Dirac

Un exemple très classique de distribution tempérée est la distribution de Dirac. Si $a \in \mathbb{R}^n$, on note $\delta_a \in \mathscr{S}'$ la forme linéaire définie par

$$\delta_a(\varphi) = \varphi(a), \quad \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n).$$

C'est une distribution tempérée, puisqu'on a

$$|\langle \delta_a, \varphi \rangle| \leqslant \|\varphi\|_\infty = p_0(\varphi), \quad \varphi \in \mathscr{S}.$$

Soient $\mathbf{a} = (a_m)$ une suite de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbf{t} = (t_m)$ une suite de $\mathbb{C}^*$ telles que les a_m sont deux-à-deux distincts et

$$\sum_{m \in \mathbb{N}} |t_m| \langle a_m \rangle^{-K} < \infty \tag{4.6}$$

pour un certain $K > 0$. Alors $\delta_{\mathbf{a},\mathbf{t}}$ définit un élément de $\mathscr{S}'$ où

$$\delta_{\mathbf{a},\mathbf{t}} = \sum_{m \in \mathbb{N}} t_m \delta_{a_m}. \tag{4.7}$$

En effet, pour tout $N \in \mathbb{N}$ et toute $\varphi \in \mathscr{S}$ on a

$$\sum_{m \in \mathbb{N}} |t_m \varphi(a_m)| \leqslant \mathrm{p}_N(\varphi) \sum_{m \in \mathbb{N}} |t_m| \langle a_m \rangle^{-N}$$

Si $N \geqslant K$, la somme de droite dans l'inégalité précédente est finie, et on obtient

$$|\langle \delta_{\mathbf{a},\mathbf{t}}, \varphi \rangle| = \left| \sum_{m \in \mathbb{N}} t_m \varphi(a_m) \right| \leqslant C_N \mathrm{p}_N(\varphi), \quad \varphi \in \mathscr{S},$$

où $C_N = \sum_{m \in \mathbb{N}} |t_m| \langle a_m \rangle^{-N}$, de sorte que $\delta_{\mathbf{a},\mathbf{t}}$ est une distribution tempérée d'ordre N.

4.3.3 Fonctions oscillantes

Puisque la transformée de Fourier préserve $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, on a en particulier $\widehat{\varphi}(\xi) \to 0$ quand $|\xi| \to \infty$ pour toute $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Puisque

$$\widehat{\varphi}(\xi) = \int \varphi(x) e^{-ix\cdot\xi} \mathrm{d}\xi = \langle \varphi, e_{-\xi} \rangle$$

avec $e_{-\xi}(x) = \exp -ix \cdot \xi$, on obtient

$$\langle u_{e_{-\xi}}, \varphi \rangle \underset{|\xi| \to \infty}{\longrightarrow} 0.$$

Comme φ est quelconque, cela signifie que $u_{e_{-\xi}} \to 0$ dans $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ quand $|\xi| \to \infty$, alors même que $|e_{-\xi}(x)| = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. Cet exemple nous dit qu'une fonction qui oscille très vite est petite, au sens des distributions.

4.4 Opérations sur les distributions tempérées

Définissons à présent quelques opérations sur les distributions qui nous permettront de les manipuler à l'instar des fonctions.

Question. *Étant donné un opérateur continu $A : \mathscr{S} \to \mathscr{S}$, dans quelle mesure peut-on l'étendre continûment à un opérateur*

$$A : \mathscr{S}' \to \mathscr{S}' \ ?$$

Généralement, si $A : \mathscr{S} \to \mathscr{S}$ est un opérateur continu et $u \in \mathscr{S}'$, on peut toujours définir la forme linéaire $A^\top u : \mathscr{S} \to \mathbb{C}$ par

$$\langle A^\top u, \varphi\rangle = \langle u, A\varphi\rangle, \quad \varphi \in \mathscr{S}.$$

Notons que si $u \in \mathscr{S}'$ on a bien $A^\top u \in \mathscr{S}'$ par continuité de A. On obtient un opérateur dual

$$A^\top : \mathscr{S}' \to \mathscr{S}'$$

continu, au sens où $A^\top u_k \to A^\top u$ dans $\mathscr{S}'$ dès que $u_k \to u$ dans $\mathscr{S}'$.

Principe Général. *Si $A^\top$ induit un opérateur continu $A^\top : \mathscr{S} \to \mathscr{S}$, alors on peut étendre A à un opérateur continu $A : \mathscr{S}' \to \mathscr{S}'$ en posant*

$$\langle Au, \varphi\rangle = \langle u, A^\top\varphi\rangle, \quad u \in \mathscr{S}', \quad \varphi \in \mathscr{S}.$$

Ce n'est pas toujours vrai que $A^\top$ préserve $\mathscr{S}$: en effet, soient $u \in \mathscr{S}' \setminus \mathscr{S}$ et $\varphi \in \mathscr{S}$, non nulles. Soit $A_{u,\varphi} : \mathscr{S} \to \mathscr{S}$ définie par $\psi \mapsto \langle u, \psi\rangle\varphi$. Alors

$$\langle A^\top_{u,\varphi}\phi, \psi\rangle = \langle \phi, A_{u,\varphi}\psi\rangle = \langle \phi, \langle u, \psi\rangle\varphi\rangle = \langle \phi, \varphi\rangle\langle u, \psi\rangle.$$

Ceci montre que $A^\top_{u,\varphi}$ est l'application $\phi \mapsto \langle \phi, \varphi\rangle u$, et donc ne préserve pas $\mathscr{S}$.

4.4.1 Support d'une distribution

Définition 4.4.1. Soit $u \in \mathscr{S}'$. Le *support* de u, noté $\operatorname{supp} u$, est le complémentaire du plus grand ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ tel que pour toute $\varphi \in \mathscr{S}$,

$$\operatorname{supp}\varphi \subset \Omega \quad \Longrightarrow \quad \langle u, \varphi\rangle = 0,$$

où $\operatorname{supp}\varphi = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n \ : \ \varphi(x) \neq 0\}}$ est le support de la fonction φ.

Notons que si $\varphi \in \mathscr{S}$, alors

$$\operatorname{supp}\varphi = \operatorname{supp} u_\varphi. \tag{4.8}$$

En effet, si $\operatorname{supp}\psi \subset \complement(\operatorname{supp}\varphi)$ alors $u_\varphi(\psi) = 0$. En particulier $\operatorname{supp} u_\varphi \subset \operatorname{supp}\varphi$. Réciproquement, soit $x \notin \operatorname{supp} u_\varphi$. Alors il existe U ouvert tel que $x \in U$ et $u_\varphi(\psi) = 0$ pour toute $\psi \in \mathscr{C}^\infty_c(U)$. Ceci implique que $\varphi(y) = 0$ pour tout $y \in U$, d'où $x \notin \operatorname{supp}\varphi$. On a bien montré (4.8).

Exemple 4.4.2. Pour tout $a \in \mathbb{R}^n$ on a $\operatorname{supp} \delta_a = \{a\}$. Plus généralement si $\delta_{\mathbf{a},\mathbf{t}}$ est la distribution définie dans (4.7) et que (a_m) n'a pas de points d'accumulation alors

$$\operatorname{supp} \delta_{\mathbf{a},\mathbf{t}} = \{a_m \ : \ m \in \mathbb{N}\}.$$

Un distribution tempérée u est à support compact si $\operatorname{supp} u$ est compact. On note $\mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$ l'espace des distributions tempérées à support compact.

Proposition 4.4.3. *Soient $u \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$ et $N \in \mathbb{N}$ tels que $\mathrm{p}_N^*(u) < \infty$. Alors la distribution u s'étend en une forme linéaire $u : \mathscr{C}^N(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$ telle que pour tout ouvert borné $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ contenant $\operatorname{supp} u$, il existe $C > 0$ telle que*

$$|\langle u, \varphi \rangle| \leqslant C \|\varphi\|_{\mathscr{C}^N(\Omega)}$$

Ici $\mathscr{C}^N(\Omega)$ est l'espace des fonctions de classe $\mathscr{C}^N$ sur Ω, muni de la norme

$$\|\varphi\|_{\mathscr{C}^N(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leqslant N} \sup_{\Omega} |\partial^\alpha \varphi|.$$

Démonstration. On fixe $\chi \in \mathscr{C}_c^\infty(\Omega)$ telle que $\chi = 1$ sur un voisinage de $\operatorname{supp} u$. Soit $\varphi \in \mathscr{S}$. Alors $\operatorname{supp}((1-\chi)\varphi) \subset \complement \operatorname{supp} u$, donc $\langle u, (1-\chi)\varphi \rangle = 0$. Il suit que

$$|\langle u, \varphi \rangle| = |\langle u, (1-\chi)\varphi + \chi\varphi \rangle| = |\langle u, \chi\varphi \rangle| \leqslant \mathrm{p}_N^*(u) \mathrm{p}_N(\chi\varphi).$$

On a $\mathrm{p}_N(\chi\varphi) \leqslant C_0 \|\chi\varphi\|_{\mathscr{C}^N(\Omega)}$ où $C_0 = \max_{|\alpha| \leqslant N} \sup_{x \in \Omega} |x^\alpha|$. Pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$ on peut écrire

$$\partial^\alpha(\chi\varphi) = \sum_{\gamma \leqslant \alpha} c_\gamma \, \partial^\gamma \chi \, \partial^{\alpha-\gamma} \varphi$$

où les c_γ sont des constantes dépendant de α et n. Comme $\operatorname{supp} \chi \subset \Omega$ on déduit de cette égalité

$$\|\chi\varphi\|_{\mathscr{C}^N(\Omega)} \leqslant C_1 \|\varphi\|_{\mathscr{C}^N(\Omega)}$$

où C_1 dépend de χ, N et n. En posant $C = \mathrm{p}_N^*(u) C_1$, on obtient

$$|\langle u, \varphi \rangle| \leqslant C \|\varphi\|_{\mathscr{C}^N(\Omega)}. \tag{4.9}$$

Soit $\mathscr{C}_b^N(\Omega)$, l'espace des fonctions de classe $\mathscr{C}^N$ sur Ω dont toutes les dérivées d'ordre $\leqslant N$ sont bornées. Muni de la norme $\|\cdot\|_{\mathscr{C}^N(\Omega)}$, cet espace est complet. Par ce qui précède, on a $|\langle u, \chi\varphi \rangle| \leqslant C \|\varphi\|_{\mathscr{C}^N(\Omega)}$. pour toute fonction $\varphi \in \mathscr{C}_b^\infty(\Omega)$ [1]. Mais $\mathscr{C}_b^\infty(\Omega)$ est dense dans $\mathscr{C}_b^N(\Omega)$, et donc la forme linéaire $\varphi \mapsto \langle u, \chi\varphi \rangle$ s'étend en une forme linéaire continue

$$u_\Omega : \mathscr{C}_b^N(\Omega) \to \mathbb{C},$$

qui vérifie $|\langle u_\Omega, \varphi \rangle| \leqslant C \|\varphi\|_{\mathscr{C}^N(\Omega)}$ pour toute $\varphi \in \mathscr{C}_b^N(\Omega)$. Pour toute $\varphi \in \mathscr{C}^N(\mathbb{R})$ on définit alors $\langle u, \varphi \rangle = \langle u_\Omega, \varphi|_\Omega \rangle$. Cette forme linéaire vérifie (4.9), et elle coïncide bien avec u sur $\mathscr{S}$ puisque pour toute $\varphi \in \mathscr{S}$ on a $\langle u, \varphi \rangle = \langle u, \chi\varphi \rangle = \langle u_\Omega, \varphi|_\Omega \rangle$ par définition de u_Ω. $\square$

1. $\mathscr{C}_b^\infty(\Omega) = \bigcap_N \mathscr{C}_b^N(\Omega)$

4.4.2 Multiplication d'une distribution par une fonction

Si $u \in \mathscr{S}'$ et $\varphi \in \mathscr{S}$, on peut définir $\varphi u \in \mathscr{S}'$ par

$$\langle \varphi u, \psi \rangle = \langle u, \varphi \psi \rangle, \quad \psi \in \mathscr{S}. \tag{4.10}$$

Cette définition est cohérente avec la multiplication des fonctions de Schwartz au sens où on a

$$\varphi\, u_\psi = u_{\varphi\psi}, \quad \varphi, \psi \in \mathscr{S}.$$

Exemple 4.4.4. Si $a \in \mathbb{R}^n$ et $\varphi \in \mathscr{S}$, alors $\varphi\delta_a = \varphi(a)\delta_a$. Plus généralement si $\delta_{\mathbf{a},\mathbf{t}}$ est la distribution définie dans (4.7) alors

$$\varphi\delta_{\mathbf{a},\mathbf{t}} = \sum_{m\in\mathbb{N}} t_m \varphi(a_m)\delta_{a_m}.$$

De manière générale, on peut multiplier une distribution tempérée $u \in \mathscr{S}'$ par n'importe quelle fonction lisse φ telle que pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$ il existe $C_\alpha, K_\alpha > 0$ tels que

$$|\partial^\alpha \varphi(x)| \leqslant C_\alpha \langle x \rangle^{K_\alpha}, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

En effet si φ est une telle fonction, alors la multiplication

$$M_\varphi : \psi \mapsto \varphi\psi$$

est continue et $M_\varphi^\top$ coïncide avec M_φ sur $\mathscr{S}$, donc par notre pincipe général, (4.10) définit bien une distribution tempérée, et on obtient une application continue

$$M_\varphi : \mathscr{S}' \to \mathscr{S}'.$$

Un fait important est que si $u \in \mathscr{E}'$ est une distribution à support compact, alors on peut définir $\varphi u \in \mathscr{E}'$ pour tout $\varphi \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$, de la manière suivante. On pose $\varphi u = (\chi\varphi)u$ où χ est n'importe quelle fonction lisse à support compact qui vaut 1 sur un voisinage de $\operatorname{supp} u$. Cette définition ne dépend pas du choix de χ : si $\tilde{\chi}$ est une autre telle fonction, alors pour toute fonction $\psi \in \mathscr{S}$ on a

$$\langle \chi\varphi u, \psi \rangle = \langle u, \chi\varphi\psi \rangle = \langle u, \tilde{\chi}\varphi\psi \rangle + \langle u, (\chi - \tilde{\chi})\varphi\psi \rangle$$

et le dernier crochet de dualité est nul puisque $(\chi - \tilde{\chi})\varphi\psi = 0$ sur un voisinage de $\operatorname{supp} u$.

Une autre manière de faire est d'utiliser la Proposition 4.4.3. Si Ω est un ouvert contenant $\operatorname{supp} u$, alors u induit une forme linéaire continue u_Ω sur $\mathscr{C}_b^N(\Omega)$. En particulier, si $\psi \in \mathscr{S}$, on peut définir φu en posant

$$\langle \varphi u, \psi \rangle = \langle u_\Omega, (\varphi\psi)|_\Omega \rangle, \quad \psi \in \mathscr{S}.$$

Cela définit bien une distribution puisqu'on a

$$|\langle \varphi u, \psi \rangle| \leqslant C_1 \|(\varphi\psi)|_\Omega\|_{\mathscr{C}^N(\overline{\Omega})} \leqslant C_2\, \mathrm{p}_N(\psi)$$

où C_2 ne dépend que de u, Ω, φ, N, n.

4.4.3 Différentiation des distributions

On veut définir une dérivation au sens des distributions, c'est-à-dire donner un sens aux dérivées partielles $\partial^\alpha u$, pour $\alpha \in \mathbb{N}^n$ et $u \in \mathscr{S}'$. Notons que pour toutes $\varphi, \psi \in \mathscr{S}$, on a

$$\int (\partial^\alpha \varphi)\psi = (-1)^{|\alpha|} \int \varphi(\partial^\alpha \psi),$$

ce qui découle d'une intégration par parties. En particulier, on a

$$(\partial^\alpha)^\top|_{\mathscr{S}} = (-1)^{|\alpha|}\partial^\alpha.$$

Ceci suggère la définition suivante.

Définition 4.4.5. Pour $u \in \mathscr{S}'$ et $\alpha \in \mathbb{N}^n$, on définit $\partial^\alpha u \in \mathscr{S}'$ en posant

$$\langle \partial^\alpha u, \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle u, \partial^\alpha \varphi\rangle, \quad \varphi \in \mathscr{S}.$$

Puisque la dérivation ∂^α est continue $\mathscr{S} \to \mathscr{S}$, elle est aussi continue comme application $\partial^\alpha : \mathscr{S}' \to \mathscr{S}'$ par notre principe général.

Exemple 4.4.6. (i) Pour tous $a \in \mathbb{R}^n$ et $\alpha \in \mathbb{N}^n$, la distribution $\partial^\alpha \delta_a$ est donnée par $\langle \partial^\alpha \delta_a, \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\partial^\alpha \varphi(a)$. Plus généralement si $\delta_{\mathbf{a},\mathbf{t}}$ est la distribution définie dans (4.7), on a

$$\langle \partial^\alpha \delta_{\mathbf{a},\mathbf{t}}, \varphi\rangle = (-1)^\alpha \sum_{m\in\mathbb{N}} t_m \partial^\alpha \varphi(a_m).$$

(ii) Soit $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $H(x) = 1$ si $x > 0$ et $H(x) = 0$ si $x \leqslant 0$. Alors H définit un élément u_H de $\mathscr{S}'(\mathbb{R})$ qui vérifie $u_H' = \delta_0$. En effet, si $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$,

$$\langle u_H', \varphi\rangle = -\langle u_H, \varphi'\rangle = -\int_0^\infty \varphi'(t)\mathrm{d}t = \varphi(0) = \langle \delta_0, \varphi\rangle.$$

Comme déjà évoqué plus haut, on écrira plus simplement $H' = \delta$ en identifiant H et la distribution associée u_H.

Exercice 4.4.7. 1. Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}^n$, on a $\nu(\partial^\alpha \delta_a) = |\alpha|$.

2. En utilisant le théorème 4.2.3, montrer que pour toutes suites (a_k) de $\mathbb{R}$ et (A_k) de $\mathbb{R}_+^*$, il existe $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ telle que

$$\limsup_k \frac{|\varphi^{(k)}(a_k)|}{A_k} = \infty.$$

Le résultat suivant montre que si $u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$ vérifie $u' = 0$ au sens des distributions, alors u est la fonction constante.

Proposition 4.4.8. *Soit $u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$ telle que $u' = 0$. Alors $u = u_c$ pour une constante $c \in \mathbb{R}$.*

Démonstration. En effet, par hypothèse on a $\langle u, \varphi' \rangle = 0$ pour toute $\varphi \in \mathscr{S}$. Soit $\chi \in \mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R}, [0,1])$ telle que $\int_\mathbb{R} \chi = 1$ et posons $c = \langle u, \chi \rangle$. Soit maintenant $\varphi \in \mathscr{S}$ et $c_\varphi = \int_\mathbb{R} \varphi$. Alors $\tilde{\varphi} = \varphi - c_\varphi \chi$ vérifie $\int_\mathbb{R} \tilde{\varphi} = 0$. Nous aurons besoin du résultat suivant.

Lemme 4.4.9. *Soit $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$. Alors, il existe $\psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ telle que $\psi' = \varphi$ si, et seulement si, $\int_\mathbb{R} \varphi = 0$.*

Démonstration. Si $\varphi = \psi'$ avec $\psi \in \mathscr{S}$ alors

$$\int_\mathbb{R} \varphi = \lim_{a \to \infty} \int_{-a}^{a} \varphi(t) \mathrm{d}t = \lim_{a \to \infty} (\psi(a) - \psi(-a)) = 0$$

puisque $\psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$. Réciproquement, supposons $\int_\mathbb{R} \varphi = 0$. Pour $t \in \mathbb{R}$ on pose

$$\psi(t) = \int_{-\infty}^{t} \varphi(s) \mathrm{d}s.$$

Alors $\psi' = \varphi$ et on vérifie facilement que $\psi \in \mathscr{S}$. □

Par le lemme, il existe $\psi \in \mathscr{S}$ telle que $\psi' = \tilde{\varphi}$. Mais alors

$$0 = \langle u, \psi' \rangle = -\langle u, \tilde{\varphi} \rangle = -\langle u, \varphi \rangle + c_\varphi \langle u, \chi \rangle,$$

ce qui se réécrit, puisque $c = \langle u, \chi \rangle$,

$$\langle u, \varphi \rangle = c \int_\mathbb{R} \varphi(t) \mathrm{d}t.$$

On a bien montré que $u = u_c$. □

On conclut ce paragraphe en montrant qu'une distribution supportée en un point est une somme de dérivées de la distribution de Dirac.

Proposition 4.4.10. *Soit $u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ telle que* $\operatorname{supp}(u) \subset \{0\}$. *Alors il existe $N \in \mathbb{N}$ et $a_\alpha \in \mathbb{C}$, $|\alpha| \leqslant N$, tels que*

$$u = \sum_{|\alpha| \leqslant N} a_\alpha \partial^\alpha \delta.$$

Démonstration. Soit $N = \nu(u)$. Alors la distribution u s'étend à $\mathscr{C}_b^N(\mathbb{R}^n)$, l'espace des fonctions φ de classe $\mathscr{C}^N$ sur $\mathbb{R}^n$ telles que $\sum_{|\alpha|\leqslant N} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \|\partial^\alpha\varphi\|_\infty < \infty$. Soient $\varphi \in \mathscr{C}_b^N(\mathbb{R}^n)$ et $\chi \in \mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ telles que $\chi = 1$ pour $|x| \leqslant 1/2$ et $\chi = 0$ pour $|x| \geqslant 1$. On a

$$\langle u, \varphi\rangle = \langle u, \chi\varphi\rangle.$$

On peut écrire

$$\chi\varphi(x) = \chi(x) \sum_{|\alpha|\leqslant N} \frac{\partial^\alpha\varphi(0)}{\alpha!} x^\alpha + g(x)$$

où $g \in \mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ est telle que $\partial^\alpha g(0) = 0$ pour $|\alpha| \leqslant N$. Il suit que

$$\langle u, \varphi\rangle = \sum_{|\alpha|\leqslant N} (-1)^{|\alpha|} a_\alpha \partial^\alpha\varphi(0) + \langle u, g\rangle$$

où $a_\alpha = (-1)^{|\alpha|}\langle u, x^\alpha\chi\rangle$. Pour conclure il suffit donc de montrer que $\langle u, g\rangle = 0$. Soit $\chi_k(x) = \chi(kx)$. Alors on affirme $(1 - \chi_k)g \to g$ dans $\mathscr{C}_b^N(\mathbb{R}^n)$. En effet, $g - (1 - \chi_k)g = \chi_k g$. On a pour $|\alpha| \leqslant N$

$$\partial^\alpha(\chi_k g) = \sum_{\gamma\leqslant\alpha} c_\gamma \partial^\gamma\chi_k \partial^{\alpha-\gamma} g$$

pour des constantes c_γ. Maintenant $|\partial^\gamma\chi_k(x)| \leqslant \|\partial^\gamma\chi\|_\infty k^{|\gamma|}$. Notons à présent que $\partial^{\alpha-\gamma} g(0) = 0$ pour tout $\gamma \leqslant \alpha$, et que $|\partial^{\alpha-\gamma} g(x)| \leqslant C_{\gamma,\alpha}|x|^{N+1-|\alpha-\gamma|}$. Notons que si $x \in \operatorname{supp}\chi_k$ alors on a $|x| \leqslant k^{-1}$. On obtient donc

$$|\partial^\alpha(\chi_k g)(x)| \leqslant \sum_\gamma c_\gamma C_{\gamma,\alpha}\|\partial^\gamma\chi\|_\infty k^{|\gamma|} k^{-(N+1)+|\alpha-\gamma|} \leqslant Ck^{-1}.$$

Par suite $\|\partial^\alpha(\chi_k g)\|_\infty \to 0$ pour tout $|\alpha| \leqslant N$ et donc $(1-\chi_k)g \to g$ dans $\mathscr{C}_b^N(\mathbb{R}^n)$ et donc $\langle u, (1 - \chi_k)g\ \rangle \to \langle u, g\rangle = 0$. Mais $(1 - \chi_k)g$ est supportée loin de 0, on en déduit que $\langle u, (1 - \chi_k)g\rangle = 0$. Puisque u est continue sur $\mathscr{C}_b^N(\mathbb{R}^n)$, on obtient $\langle u, g\rangle = 0$ et la proposition est démontrée. □

4.4.4 Produit de convolution sur $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \times \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$

Commençons par rappeler quelques propriétés sur le produit de convolution des fonctions Schwartz. Pour tous $\varphi, \psi \in \mathscr{S}$ on rappelle que le produit de convolution $\varphi \star \psi$ est défini par

$$(\varphi \star \psi)(x) = (\psi \star \varphi)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x - y)\psi(y)\mathrm{d}y, \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{4.11}$$

Proposition 4.4.11. *Pour tous $\varphi, \psi \in \mathscr{S}$, on a $\varphi \star \psi \in \mathscr{S}$.*

Démonstration. Comme $\psi \in \mathscr{S}$ on a $C > 0$ telle que pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$,

$$|\varphi(x-y)\psi(y)| \leqslant C\|\varphi\|_\infty \langle y\rangle^{-(n+1)}.$$

La fonction $y \mapsto \langle y\rangle^{-n-1}$ étant intégrable sur $\mathbb{R}^n$, il suit du théorème de dérivation sous le signe intégral que $\varphi \star \psi$ est continue. On a aussi

$$\mathcal{F}(\varphi \star \psi) = (\mathcal{F}\varphi)(\mathcal{F}\psi) \in \mathscr{S}$$

puisque $\mathcal{F}\varphi, \mathcal{F}\psi \in \mathscr{S}$. Par inversion de Fourier, la fonction $\varphi\star\psi$ coïncide presque partout avec $\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}\varphi\mathcal{F}\psi) \in \mathscr{S}$, et donc partout puisque $\varphi \star \psi$ est continue. □

Remarque 4.4.12. Il n'est pas dur de voir que si $\rho \in \mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ avec $\int_{\mathbb{R}^n} \rho = 1$ et que $\rho_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\rho(x/\varepsilon)$ de sorte que (ρ_ε) est une approximation de l'identité, alors $\rho_\varepsilon \star \varphi \to \varphi$ dans $\mathscr{S}$ quand $\varepsilon \to 0$ pour tout $\varphi \in \mathscr{S}$.

4.4.5 Produit de convolution sur $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n) \times \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$

Si $u \in \mathscr{S}'$ et $\varphi \in \mathscr{S}$, on définit le produit de convolution de u et φ par

$$(u \star \varphi)(x) = \langle u, \varphi(x - \cdot)\rangle, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Exemple 4.4.13. Si $\delta = \delta_0$ est la distribution de Dirac, alors pour toute $\varphi \in \mathscr{S}$, on a

$$(\delta \star \varphi)(x) = \langle \delta, \varphi(x - \cdot)\rangle = \varphi(x-y)|_{y=0} = \varphi(x)$$

de sorte que $\delta \star \varphi = \varphi$.

Théorème 4.4.14. *Pour tous $u \in \mathscr{S}'$ et $\varphi \in \mathscr{S}$, on a $u \star \varphi \in \mathscr{C}^\infty$. De plus, en notant $N = \nu(u)$, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$, il existe $C_{\alpha,u,\varphi,n,N}$ dépendant de u, φ, n et N telle que*

$$|\partial^\alpha (u \star \varphi)(x)| \leqslant C_{\alpha,u,\varphi,n,N} \langle x\rangle^N.$$

En fait $C_{\alpha,u,\varphi,n,N} \leqslant C \mathrm{p}_N^*(u)\mathrm{p}_N(\partial^\alpha\varphi)$ où C ne dépend que de n et N.

Avant de montrer ce résultat, introduisons quelques notions utiles. Une application $\Phi : \mathbb{R}^d \to \mathscr{S}$ admet une dérivée partielle en $a \in \mathbb{R}^d$ par rapport à la i-eme coordonnée si on a un dévelopement limité de la forme

$$\Phi(a + te_i) = \Phi(a) + t\varphi_{a,i} + o_{\mathscr{S}}(t)$$

où $\varphi_{a,i} \in \mathscr{S}$, $(e_1, \ldots, e_d)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^d$ et où $\Psi(t) = o_{\mathscr{S}}(t)$ signifie que $\Psi(t)/t \to 0$ dans $\mathscr{S}$ quand $t \to 0$. On note alors $\partial_{a_i}\Phi(a) = \varphi_{a,i}$.

DÉFINITION 4.4.15. On dit qu'une application $\Phi : \mathbb{R}^d \to \mathscr{S}$ est de classe $\mathscr{C}^0$ si elle est continue. Par induction, pour $N \geqslant 1$, on dit que Φ *est de classe* $\mathscr{C}^N$ sur $\mathbb{R}^d$ si elle admet des dérivées partielles en tout point par rapport à toutes les coordonnées, et si les fonctions $a \mapsto \partial_{a_i}\Phi(a)$ pour $i = 1, \dots, d$ sont de classe $\mathscr{C}^{N-1}$. Enfin on dit que Φ est $\mathscr{C}^\infty$ si elle est de classe $\mathscr{C}^N$ pour tout N.

PROPOSITION 4.4.16. *Soit* $\Phi : \mathbb{R}^d \to \mathscr{S}$ *une application de classe* $\mathscr{C}^N$*, et* $u \in \mathscr{S}'$*. Alors l'application* $\mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ *donnée par* $a \mapsto \langle u, \Phi(a)\rangle$ *est de classe* $\mathscr{C}^N$*.*

Démonstration. Démontrons le lemme pour $N = 1$ (le cas général est obtenu par une récurrence immédiate). Pour $a \in \mathbb{R}^d$ on note $\psi(a) = \langle u, \Phi(a)\rangle$. Alors pour $i = 1, \dots, d$,

$$\psi(a + te_i) = \langle u, \Phi(a + te_i)\rangle = \langle u, \Phi(a)\rangle + t\langle u, \partial_{a_i}\Phi(a)\rangle + \langle u, o_{\mathscr{S}}(t)\rangle.$$

Comme u est continue $\mathscr{S} \to \mathbb{C}$, on obtient

$$\psi(a + te_i) = \psi(a) + t\langle u, \partial_{a_i}\Phi(a)\rangle + o(t).$$

En particulier ψ admet des dérivées partielles en tout point dans toutes les directions, et $\partial_{a_i}\psi(a) = \langle u, \partial_{a_i}\Phi(a)\rangle$ pour $i = 1, \dots, d$. Les applications $a \mapsto \partial_{a_i}\Phi(a)$ étant continues, ainsi que $u : \mathscr{S} \to \mathbb{C}$, les applications $a \mapsto \partial_{a_i}\psi(a)$ le sont aussi. Ainsi $\psi \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^d)$ et le lemme est démontré. □

Démonstration du théorème 4.4.14. Soit $u \in \mathscr{S}'$ et $\varphi \in \mathscr{S}$. Alors l'application $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathscr{S}$ définie par

$$\Phi(a) = \varphi(a - \cdot)$$

est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^n$. La proposition 4.4.16 implique alors que $u \star \varphi \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$, puisque $u \star \varphi$ coïncide avec l'application $a \mapsto \langle u, \Phi(a)\rangle$.

Il reste à montrer que pour $N = \nu(u) \in \mathbb{N}$ il existe $C_{u,\varphi,N} > 0$ telle que

$$|(u \star \varphi)(a)| \leqslant C_{u,\varphi,n,N}\langle a\rangle^N, \quad a \in \mathbb{R}^n, \tag{4.12}$$

et utiliser la proposition 4.3.1. Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $C_1 = \mathrm{p}_N^*(u) < \infty$. Par définition de $\mathrm{p}_N^*(u)$ on a, pour tout $a \in \mathbb{R}^n$,

$$|\langle u, \Phi(a)\rangle| \leqslant C_1\, \mathrm{p}_N(\Phi(a)). \tag{4.13}$$

Calculons à présent

$$\mathrm{p}_N(\Phi(a)) = \sum_{|\alpha|,|\beta| \leqslant N} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial_x^\beta \varphi(a - x)| = \sum_{|\alpha|,|\beta| \leqslant N} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |(a - x)^\alpha \partial_x^\beta \varphi(x)|.$$

Pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ avec $|\alpha|, |\beta| \leqslant N$, la formule de Newton donne

$$\big|(a-x)^\alpha \partial_x^\beta \varphi(x)\big| \leqslant \sum_{\gamma \leqslant \alpha} c_\gamma |a^\gamma x^{\alpha-\gamma} \partial_x^\beta \varphi(x)| \leqslant p_N(\varphi) \sum_{\gamma \leqslant \alpha} c_\gamma |a^\gamma|$$

pour des constantes c_γ dépendant uniquement de n et α. Mais $\gamma_i \leqslant |\gamma| \leqslant N$ pour tout i, donc $|a^\gamma| \leqslant \langle a \rangle^N$, et on obtient finalement

$$\mathrm{p}_N(\Phi(a)) \leqslant C\, \mathrm{p}_N(\varphi) \langle a \rangle^N$$

où C dépend uniquement de N et n. En combinant ceci avec (4.13), on obtient (4.12) avec $C_{u,\varphi,n,N} = C \mathrm{p}_N^*(u)\, \mathrm{p}_N(\varphi)$. □

La proposition suivante montre que le produit de convolution se comporte bien pour la dérivation, et que l'on a des propriétés plus fortes sur $u \star \varphi$ si $u \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$.

Proposition 4.4.17 (Propriétés du produit de convolution). *Soient $u \in \mathscr{S}'$, $\varphi \in \mathscr{S}$ et $\alpha \in \mathbb{N}^n$. Alors*

(i) $\partial^\alpha (u \star \varphi) = \partial^\alpha u \star \varphi = u \star \partial^\alpha \varphi$;

(ii) *si $u \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$ alors $u \star \varphi \in \mathscr{S}$;*

(iii) *si $u \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$ et $\varphi \in \mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ alors $u \star \varphi \in \mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$.*

Démonstration. Le point (i) découle de

$$\partial^\alpha (u \star \varphi)(a) = \langle u, (\partial^\alpha \varphi)(a - \cdot) \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle u, \partial^\alpha [\varphi(a - \cdot)] \rangle = \langle \partial^\alpha u, \varphi(a - \cdot) \rangle.$$

Le point (iii) est clair car si $a \in \mathbb{R}^n$ vérifie

$$(a + \operatorname{supp} \varphi) \cap \operatorname{supp} u = \emptyset$$

alors $(u \star \varphi)(a) = 0$, et ceci est vrai dès que $|a|$ est assez grand. Enfin pour le point (ii) on remarque que si $\chi \in \mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ vaut 1 sur un voisinage du support de u, alors $(u \star \varphi)(a) = \langle u, \chi(\cdot) \varphi(a - \cdot) \rangle$. Si $N = \nu(u)$, on a alors pour tout a

$$|(u \star \varphi)(a)| \leqslant C \mathrm{p}_N[\chi(\cdot) \varphi(a - \cdot)] \tag{4.14}$$

où $C = \mathrm{p}_N^*(u)$. Soit $M \in \mathbb{N}$. Si $|\alpha|, |\beta| \leqslant N$ et $x \in \mathbb{R}^n$, on a

$$|x^\alpha \partial_x^\beta (\chi(x) \varphi(a - x))| \leqslant C_1 \langle x \rangle^N \langle a - x \rangle^{-M}$$

où C_1 dépend de α, β, χ et φ. Pour $x \in \operatorname{supp} \chi$, la quantité de droite est contrôlée par $C_1 C_2 \langle a \rangle^{-M}$ pour une constante C_2 ne dépendant que de $\operatorname{supp} \chi$. Ainsi (4.14) donne

$$|(u \star \varphi)(a)| \leqslant C C_1 C_2 \langle a \rangle^{-M}$$

En utilisant $\partial^\beta (u \star \varphi) = u \star \partial^\beta \varphi$ et en appliquant l'estimée précédente avec $\partial^\beta \varphi$ à la place de φ, on obtient que $u \star \varphi \in \mathscr{S}$. □

Proposition 4.4.18. *Soit $\Phi : \mathbb{R}^d \to \mathscr{S}$ une application continue (au sens de la définition 4.4.15) telle que pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a $\int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{p}_N(\Phi(a))\mathrm{d}a < \infty$. Alors $\int_{\mathbb{R}^d} \Phi(a)\mathrm{d}a \in \mathscr{S}$ et pour tout $u \in \mathscr{S}'$,*

$$\int_{\mathbb{R}^d} \langle u, \Phi(a)\rangle \mathrm{d}a = \left\langle u, \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(a)\mathrm{d}a \right\rangle .$$

Démonstration. Découle de la linéarité de u et de ce qu'on peut approximer les intégrales par les sommes de Riemann. Les détails sont laissés en exercice. $\square$

Si $u \in \mathscr{S}'$ et $\varphi, \psi \in \mathscr{S}$, la proposition ci-dessus appliquée à $\Phi(a) = \varphi(a - \cdot)\psi(a)$ donne

$$\langle u \star \varphi, \psi\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \langle u, \varphi(x - \cdot)\rangle \psi(x)\mathrm{d}x = \left\langle u, \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x - \cdot)\psi(x)\mathrm{d}x \right\rangle ,$$

Il suit que

$$\langle u \star \varphi, \psi\rangle = \langle u, \check{\varphi} \star \psi\rangle. \tag{4.15}$$

Corollaire 4.4.19. *L'inclusion $\mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathscr{S}'$ est d'image dense : pour tout $u \in \mathscr{S}'$, il existe une suite (φ_k) de $\mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ telle que $u_{\varphi_k} \to u$ dans $\mathscr{S}'$.*

Démonstration. Soit $\chi \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$ telle que $\chi(t) = 1$ pour $t \leqslant 1$ et $\chi(t) = 0$ si $t \geqslant 2$. Pour tous $k \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}^n$ on pose $\chi_k(x) = \chi(|x| - k)$. Alors $\chi_k \in \mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ et notons que si $\varphi \in \mathscr{S}$ on a $\chi_k\varphi \to \varphi$ dans $\mathscr{S}$. En effet, pour $N \in \mathbb{N}$ on a, quand $k \to \infty$,

$$\mathrm{p}_N\left((1 - \chi_k)\varphi\right) \leqslant C \sup_{|x| \geqslant k} \sum_{|\alpha|, |\beta| \leqslant N} |x^\alpha \partial_x^\beta \varphi(x)| \to 0.$$

Il suit que $\chi_k u \to u$ dans $\mathscr{S}'$ pour tout $u \in \mathscr{S}'$. Soit maintenant $\rho \in \mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ telle que $\int_{\mathbb{R}^n} \rho = 1$. Pour $k \geqslant 1$ on pose $\rho_k(x) = k^n \rho(kx)$ de sorte que (ρ_k) est une approximation de l'identité. Posons à présent

$$u_k = (\chi_k u) \star \rho_k, \quad k \geqslant 1.$$

Alors $u_k \in \mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ par le point (iii) de la proposition 4.4.17, car $\chi_k u \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$ et $\rho_k \in \mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Par la formule (4.15) on obtient alors, si $\psi \in \mathscr{S}$,

$$\langle u_k, \psi\rangle = \langle (\chi_k u) \star \rho_k, \psi\rangle = \langle \chi_k u, \check{\rho}_k \star \psi\rangle.$$

Mais $\check{\rho}_k \star \psi \to \psi$ dans $\mathscr{S}$ par la remarque 4.4.12 et on a vu que $\chi_k u \to u$ dans $\mathscr{S}'$. Ainsi le corollaire 4.2.5 permet d'affirmer que

$$\langle \chi_k u, \check{\rho}_k \star \psi\rangle \to \langle u, \psi\rangle$$

ce qui implique $u_k \to u$. Le corollaire est démontré. $\square$

On conclut cette section en remarquant que le produit de convolution s'étend en une application

$$\mathscr{E}' \times \mathscr{S}' \to \mathscr{S}'.$$

En effet, si $u \in \mathscr{E}'$ et $v \in \mathscr{S}'$, on peut définir

$$\langle u \star v, \varphi \rangle = \langle u, \check{v} \star \varphi \rangle, \quad \varphi \in \mathscr{S},$$

puisque, si $\varphi \in \mathscr{S}$, on a $\check{v} \star \varphi \in \mathscr{C}^\infty$ par le théorème 4.4.14.

4.4.6 Transformation de Fourier sur $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$

On veut construire une application continue $\mathcal{F} : \mathscr{S}' \to \mathscr{S}'$ qui coïncide avec la transformation de Fourier usuelle sur $\mathscr{S}$, c'est-à-dire qu'on veut

$$\widehat{u_\varphi} = u_{\widehat{\varphi}}, \quad \varphi \in \mathscr{S}.$$

Si une telle application existe alors nécessairement, pour tous $\varphi, \psi \in \mathscr{S}$, on doit avoir

$$\widehat{u_\varphi}(\psi) = u_{\widehat{\varphi}}(\psi) = \int \hat{\varphi}\psi = \int \varphi\hat{\psi} = \langle u_\varphi, \hat{\psi} \rangle.$$

Ceci suggère la définition suivante.

Définition 4.4.20. Pour toute distribution tempérée $u \in \mathscr{S}'$ on définit $\widehat{u} \in \mathscr{S}$ par

$$\langle \widehat{u}, \varphi \rangle = \langle u, \widehat{\varphi} \rangle, \quad \varphi \in \mathscr{S}.$$

La continuité de $\mathcal{F} : \mathscr{S} \to \mathscr{S}$ assure que la formule ci-dessous définit bien une distribution.

Exemple 4.4.21. (i) Si δ est la distribution de Dirac, alors $\hat{\delta} \in L^\infty \cap \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ avec

$$\hat{\delta}(\xi) = 1, \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

En fait si $a \in \mathbb{R}^n$, on a $\hat{\delta}_a(\xi) = \exp(-ia \cdot \xi)$. En effet, si $\varphi \in \mathscr{S}$, on a

$$\langle \hat{\delta}_a, \varphi \rangle = \hat{\varphi}(a) = \int \varphi(\xi) e^{-ia\cdot\xi} \mathrm{d}\xi = \langle u_{e_a}, \varphi \rangle$$

avec $e_a(\xi) = \exp -ia \cdot \xi$.

(ii) Si $n = 1$ et $\sum_{m\in\mathbb{N}} \delta_m \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$ est le peigne de Dirac, alors la formule sommatoire de Poisson s'écrit

$$\widehat{\sum_{m\in\mathbb{N}} \delta_{2\pi m}} = \sum_{m\in\mathbb{N}} \delta_m.$$

(iii) Le théorème de Shannon affirme que si $\varphi \in \mathscr{S}$ vérifie $\operatorname{supp} \hat{\varphi} \subset [-\alpha, \alpha]$, alors pour tout $a \in \mathbb{R}$ on a

$$\varphi(a) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \operatorname{sinc}(\alpha a - n\pi)\varphi(n\pi/\alpha).$$

Ceci se réécrit $\langle u_a, \varphi \rangle = 0$ où $u_a = \delta_a - \sum_{n\in\mathbb{Z}} \operatorname{sinc}(\alpha a - n\pi)\delta_{n\pi/\alpha}$. Le théorème de Shannon signifie donc que pour tout $a \in \mathbb{R}^n$

$$\operatorname{supp} \widehat{u}_a \cap]-\alpha, \alpha[= \emptyset.$$

Proposition 4.4.22 (Propriétés de la transformation de Fourier sur les distributions). *Soient $u \in \mathscr{S}'$, $\varphi \in \mathscr{S}$ et $v \in \mathscr{E}'$. Alors*

(i) *$\widehat{v} \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ et si $e_{-\xi}(x) = \exp(-ix \cdot \xi)$ on a*

$$\widehat{v}(\xi) = \langle v, e_{-\xi} \rangle,$$

et si $N = \nu(v)$ on a pour tout $\gamma \in \mathbb{N}^n$

$$|\partial_\xi^\gamma \hat{v}(\xi)| \leqslant C_\gamma \langle \xi \rangle^N, \quad \xi \in \mathbb{R}^n;$$

(ii) *$\widehat{v}$ est analytique sur $\mathbb{R}^n$ et s'étend en une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}^n$, c'est-à-dire une fonction holomorphe en chacune de ses variables ;*

(iii) *$\widehat{u \star \varphi} = \widehat{u} \cdot \widehat{\varphi}$, et $\widehat{u \star v} = \widehat{u} \cdot \widehat{v}$;*

(iv) *si $\alpha \in \mathbb{N}^n$ alors $\widehat{\partial^\alpha u} = (i\xi)^\alpha \widehat{u}$.*

Démonstration. Montrons (i). Soit $\chi \in \mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ telle que χ vaut 1 sur un voisinage du support de v. Alors pour tout $\varphi \in \mathscr{S}$ on a $\langle \widehat{v}, \varphi \rangle = \langle v, \chi\widehat{\varphi} \rangle$. En écrivant

$$\chi(x)\widehat{\varphi}(x) = \int \varphi(\xi)\chi(x)e^{-ix\cdot\xi} \mathrm{d}\xi$$

et en utilisant la proposition 4.4.18 avec

$$\Phi : \xi \mapsto (x \mapsto \varphi(\xi)\chi(x))$$

on obtient bien

$$\langle \widehat{v}, \varphi \rangle = \int \varphi(\xi) \langle v, \chi e_{-\xi} \rangle \mathrm{d}\xi,$$

ce qu'on voulait (comme $\chi = 1$ sur $\operatorname{supp} v$ on a $\langle v, e_{-\xi} \rangle = \langle v, \chi e_{-\xi} \rangle$ par définition de $\langle v, e_{-\xi} \rangle$). Enfin, on a $\partial_\xi^\gamma e_{-\xi}(x) = (-ix)^\gamma e_{-\xi}(x)$ et donc

$$|\partial_\xi^\gamma \hat{v}(\xi)| = |\langle v, \partial_\xi^\gamma e_{-\xi} \rangle| \leqslant C_1 \sum_{|\alpha|, |\beta| \leqslant N} \sup_{x \in \operatorname{supp} v} |x^\alpha \partial_x^\beta [(-ix)^\gamma e_{-\xi}(x)]| \leqslant C_2 \langle \xi \rangle^N$$

où $C_1 = \mathrm{p}_N^*(v)$ et C_2 ne dépend que de $\operatorname{supp} v, \gamma, N$ et n. Le point (ii) est laissé en exercice.

Les deux derniers points sont valides si $u \in \mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, donc ils le sont aussi pour $u \in \mathscr{S}'$ par densité de $\mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ dans $\mathscr{S}'$ et par continuité de $u \mapsto \widehat{u \star \varphi}$ et $u \mapsto \widehat{u}\,\widehat{\varphi}$ comme applications $\mathscr{S}' \to \mathscr{S}'$ (ceci reste vrai si on remplace φ par v par le point (i)). □

Proposition 4.4.23 (Distributions harmoniques sur $\mathbb{R}^n$). *Soit $u \in \mathscr{S}'$ telle que $\Delta u = 0$ dans $\mathscr{S}'$. Alors u est une fonction polynomiale de $x_1, \ldots, x_n$.*

Démonstration. Par la proposition 4.4.22 on a $\widehat{\Delta u} = -|\xi|^2 \hat{u}$. L'hypothèse $\Delta u = 0$ implique alors que $\operatorname{supp} \hat{u} \subset \{0\}$. Par la propositon 4.4.10, on déduit qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ et $a_\alpha \in \mathbb{C}$, $|\alpha| \leqslant N$, tels que

$$\hat{u} = \sum_{|\alpha| \leqslant N} a_\alpha \partial^\alpha \delta.$$

Notons à présent que

$$\mathcal{F}^{-1}(\partial^\alpha \delta)(x) = (2\pi)^{-n} \mathcal{J}\mathcal{F}(\partial^\alpha \delta)(x) = (2\pi)^{-n} \mathcal{J}(ix)^\alpha \mathcal{F}\delta(x) = (2\pi)^{-n}(-ix)^\alpha.$$

Il suit que $u(x) = \mathcal{F}^{-1}(\hat{u})(x) = (2\pi)^{-n} \sum_{|\alpha| \leqslant N} a_\alpha (-1)^\alpha i^\alpha x^\alpha$, ce qui conclut la démonstration. □

Chapitre 5

Équations d'évolution

Dans ce chapitre nous introduisons trois équations d'évolutions qui proviennent de la physique : l'équation chaleur, l'équation de Schrödinger et l'équation des ondes. Nous donnons les solutions de ces équations dans l'espace des distributions. Enfin nous définissons les espaces de Sobolev et étudions le comportement des équations d'évolution sur ces espaces. Une référence possible pour ce chapitre est [2].

Sommaire

5.1 Fonctions lisses à valeurs distributions . . . 72
5.2 Équation de la chaleur . . . 73
5.2.1 Modèle physique . . . 73
5.2.2 Résolution de l'équation de la chaleur dans l'espace euclidien 75
5.3 Équation de Schrödinger . . . 76
5.3.1 Modèle physique . . . 76
Le quanta de lumière . . . 76
Propagation des paquets d'ondes . . . 77
De Broglie et les ondes de matière . . . 78
5.3.2 Solutions de l'équation de Schrödinger . . . 78
5.3.3 Propagation des paquets d'ondes . . . 79
5.4 Équation des ondes . . . 80
5.4.1 Solution de l'équation des ondes . . . 80
5.5 Espaces de Sobolev . . . 82
5.5.1 Définition et premières propriétés . . . 82
5.5.2 Injections de Sobolev . . . 84
5.6 Équations d'évolutions sur les espaces de Sobolev . . . 84
5.6.1 Propagateur de la chaleur . . . 84
5.6.2 Propagateur de Schrödinger . . . 86

5.1 Fonctions lisses à valeurs distributions

Définition 5.1.1. Soit $u : \mathbb{R} \to \mathscr{S}'$. Pour $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ on dit que u est de classe $\mathscr{C}^k$ si pour tout $\varphi \in \mathscr{S}$, l'application $t \mapsto \langle u(t), \varphi\rangle$ est de classe $\mathscr{C}^k$. Pour tout $\ell \leqslant k$, on note $\partial_t^\ell u(t)$ la forme linéaire

$$\varphi \mapsto \frac{\mathrm{d}^\ell}{\mathrm{d}t^\ell}\langle u(t), \varphi\rangle.$$

Proposition 5.1.2. *Soit $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ et $u \in \mathscr{C}^k(\mathbb{R}, \mathscr{S}')$. Alors pour tout $\ell \leqslant k$, $\partial_t^\ell u \in \mathscr{C}^{k-\ell}(\mathbb{R}, \mathscr{S}')$.*

Démonstration. Il suffit de montrer que $\partial_t^k u(t) \in \mathscr{S}'$. Montrons le pour $k = 1$, le cas général résultant d'une récurrence immédiate. Soit $t \in \mathbb{R}$ et (t_ℓ) une suite qui converge vers t. Alors pour tout $\varphi \in \mathscr{S}$,

$$\langle \partial_t u(t), \varphi\rangle = \lim_\ell \left\langle \frac{u(t_\ell) - u(t)}{t_\ell - t}, \varphi \right\rangle.$$

En particulier, si $v_\ell = (u(t_\ell) - u(t))/(t_\ell - t)$, alors $(\langle v_\ell, \varphi\rangle)_\ell$ est bornée pour tout φ, donc par le théorème de Banach-Steinhaus, il existe $C, N > 0$ tels que

$$|\langle v_\ell, \varphi\rangle| \leqslant C p_N(\varphi), \quad \varphi \in \mathscr{S}, \quad \ell \in \mathbb{N}.$$

En particulier $|\langle \partial_t u(t), \varphi\rangle| \leqslant C p_N(\varphi)$ et on en déduit que $\partial_t u(t) \in \mathscr{S}$. □

Remarque 5.1.3. Si $u \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathscr{S}')$, alors pour tout segment $I \subset \mathbb{R}$, il existe $C, N > 0$ tels que

$$p_N^*(u(t)) \leqslant C, \quad t \in I.$$

En effet, si ce n'est pas le cas, on peut trouver (t_k) est une suite de I telle que $p_k^*(u(t_k)) > k$. Quitte à extraire, on peut supposer $t_k \to t$ quand $k \to \infty$ avec $t \in I$. Comme $u(t_k) \to u(t)$ dans $\mathscr{S}'$ le théorème de Banach-Steinhaus nous donne $C, N > 0$ tels que $p_N^*(u(t_k)) \leqslant C$ pour tout k. Si $k > \max(N, C)$ on obtient alors $k < p_k^*(u(t_k)) \leqslant p_N^*(u(t_k)) \leqslant C$ ce qui est absurde.

Cette remarque, appliquée à $u(t) - \sum_{k=0}^{K} \frac{\partial_t^k u(\tau)}{k!}(t-\tau)^k$, donne immédiatement le corollaire suivant.

Corollaire 5.1.4. *Si $u \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathscr{S}')$ alors pour tous $K \in \mathbb{N}$ et $\tau \in \mathbb{R}$,*

$$u(t) = \sum_{k=0}^{K} \frac{\partial_t^k u(\tau)}{k!}(t-\tau)^k + \mathcal{O}_{\mathscr{S}'}((t-\tau)^{K+1})$$

quand $t \to \tau$.

Ici, $v(t) = \mathcal{O}_{\mathscr{S}'}((t-\tau)^{K+1})$ signifie que pour tout voisinage borné I de τ on a $C, N > 0$ tels que

$$|\langle v(t), \varphi\rangle| \leqslant C p_N(\varphi)|t-\tau|^{K+1}, \quad \varphi \in \mathscr{S}, \quad t \in I.$$

Nous concluons ce paragraphe en énonçant deux propriétés utiles.

Proposition 5.1.5. *Soit $A : \mathscr{S} \to \mathscr{S}$ linéaire continue, telle que $A^\top$ est continue $\mathscr{S} \to \mathscr{S}$. Alors pour tout $u \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathscr{S}')$ on a $Au \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathscr{S}')$ et*

$$\partial_t^k Au(t) = A\partial_t^k u(t), \quad k \in \mathbb{N}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Démonstration. Soient A, u comme ci-dessus. On traite d'abord le cas $k = 1$. La même démonstration que pour la proposition 5.1.2 implique qu'il existe $C, N > 0$ tels que

$$|\partial_t\langle Au(t), \varphi\rangle| \leqslant C p_N(A^\top\varphi), \quad \varphi \in \mathscr{S}.$$

Puisque $A^\top$ est continue $\mathscr{S} \to \mathscr{S}$, il existe $D, M > 0$ tels que $p_N(A^\top\varphi) \leqslant D p_M(\varphi)$ pour toute φ. Ainsi $\partial_t Au \in \mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathscr{S}')$ et

$$\langle \partial_t Au(t), \varphi\rangle = \partial_t\langle Au(t), \varphi\rangle = \partial_t\langle u(t), A^\top\varphi\rangle = \langle \partial_t u(t), A^\top\varphi\rangle = \langle A\partial_t u(t), \varphi\rangle.$$

Une récurrence immédiate donne $Au \in \mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathscr{S}')$ et $\partial_t^k Au = A\partial_t^k u$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. □

Proposition 5.1.6. *Soient $u \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathscr{S})$ et $\Phi \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathscr{S})$. Alors $t \mapsto \langle u(t), \Phi(t)\rangle$ est une fonction $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$ et on a*

$$\partial_t^k\langle u(t), \Phi(t)\rangle = \sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} \left\langle \partial_t^\ell u(t), \partial_t^{k-\ell}\Phi(t)\right\rangle, \quad k \in \mathbb{N}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Démonstration. Pour $k = 1$, c'est une conséquence de ce qu'on a les développements

$$u(t) = u(\tau) + (t-\tau)\ \partial_t u(\tau) + \mathcal{O}_{\mathscr{S}'}((t-\tau)^2)$$

$$\text{et} \quad \Phi(t) = \Phi(\tau) + (t-\tau)\partial_t\Phi(\tau) + \mathcal{O}_{\mathscr{S}}((t-\tau)^2)$$

quand $t \to \tau$. Le cas général résulte d'une récurrence immédiate. □

5.2 Équation de la chaleur

5.2.1 Modèle physique

On considère un système dans l'espace $\mathbb{R}^n$ dont les caractéristiques, dépendant du point $x \in \mathbb{R}^n$ et du temps $t \in \mathbb{R}$, sont les suivantes :

$\rho = \rho(x,t)$	densité de masse en kg.m^{-3} ;
$e = e(x,t)$	densité d'énergie J.m^{-3} ;
$c = c(x,t)$	capacité calorifique volumique en J.kg^{-1}.m^{-3} ;
$T = T(x,t)$	température en K ;
$\vec{\varphi} = \vec{\varphi}(x,t)$	densité de flux d'énergie en J.m^{-2}.s^{-1} ;
$\lambda = \lambda(x,t)$	conductivité thermique en J.s^{-1}.K^{-1}.

La capacité calorifique est donnée par la relation

$$e = \rho c T. \tag{5.1}$$

Le flux d'énergie est défini de la manière qui suit. Étant donné un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ qui est bordé par une hypersurface S, on a, par définition du flux $\vec{\varphi}$,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega e(x,t)\mathrm{d}x = -\int_{\partial\Omega} \vec{\varphi}(x,t)\cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S}$$

où $\mathrm{d}\vec{S}$ est l'élément de surface de S, orienté vers l'extérieur. Le théorème de Stokes donne

$$\int_{\partial\Omega} \vec{\varphi}(x,t)\cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S} = \int_\Omega \operatorname{div}\vec{\varphi}(x,t)\mathrm{d}x \quad \text{avec} \quad \operatorname{div}\vec{\varphi} = \sum_{i=1}^n \partial_{x_i}\varphi_i,$$

où on a noté $\vec{\varphi} = (\varphi_i)_{i=1,\dots,n}$. Ceci est vrai pour tout domaine Ω et on en déduit la relation

$$\partial_t e + \operatorname{div}\vec{\varphi} = 0. \tag{5.2}$$

D'autre part, la loi de Fourier (établie expérimentalement par Joseph Fourier en 1822) stipule que le flux d'énergie (ou de chaleur) est proportionnel au gradient de la température,

$$\vec{\varphi} = -\lambda\vec{\nabla}T \tag{5.3}$$

où $\vec{\nabla}T = (\partial_{x_i}T)_{i=1,\dots,n}$. En combinant (5.1), (5.2) et (5.3), on obtient

$$\partial_t(\rho c T) - \operatorname{div}(\lambda\vec{\nabla}T) = 0.$$

En supposant que le milieu est homogène et stationnaire, c'est-à-dire que les quantités ρ, c et λ ne dépendent ni du temps ni de l'espace, on obtient l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D\Delta T \quad \text{avec} \quad D = \frac{\lambda}{\rho c} > 0.$$

La constante D est appelée *diffusivité*.

5.2.2 Résolution de l'équation de la chaleur dans l'espace euclidien

Étant donnée une distribution $u_0 \in \mathscr{S}'$, on veut donc comprendre les solutions $u \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}_+, \mathscr{S}')$ de l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u \tag{5.4}$$

avec condition initiale $u(0) = u_0$, où l'égalité précédente a lieu dans $\mathscr{S}'$. Notons qu'on a supposé ici $D = 1$, ce qui est toujours possible quitte à effectuer un reparamétrage du temps.

Théorème 5.2.1. *Pour tout $u_0 \in \mathscr{S}'$, il existe une unique solution $u \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}_+, \mathscr{S}')$ de (5.4), donnée par*

$$u(t) = u_0 \star \mathrm{Q}(t), \quad t \geqslant 0. \tag{5.5}$$

On a $\mathrm{Q}(0) = \delta$ et pour $t > 0$, $\mathrm{Q}(t) \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ avec

$$\mathrm{Q}(t)(x) = (4\pi t)^{-n/2} \exp(-|x|^2/4t), \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{5.6}$$

Démonstration. Soit u donnée par (5.5). Notons que pour tout $t \geqslant 0$, on a

$$\mathcal{F}(u_0 \star \mathrm{Q}(t)) = \widehat{u_0} \cdot \widehat{\mathrm{Q}(t)} = \widehat{u_0} \exp(-t|\xi|^2)$$

au sens des distributions. Notons que si on note

$$\mathrm{P}(t)(\xi) = \exp(-t|\xi|^2), \quad t \geqslant 0, \quad \xi \in \mathbb{R}^n,$$

alors $\widehat{u_0} \cdot \mathrm{P} \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}_+, \mathscr{S}')$ d'où l'on tire $u_0 \star \mathrm{Q} = \mathcal{F}^{-1}(\widehat{u_0} \cdot \mathrm{P}) \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}_+, \mathscr{S}')$ par la proposition 5.1.5, avec

$$\partial_t \mathcal{F}(u_0 \star \mathrm{Q}(t)) = \partial_t(\widehat{u}_0 \mathrm{P}(t)) = \widehat{u_0} \cdot (-|\xi|^2 \mathrm{P}(t)) = \mathcal{F}(u_0 \star \Delta \mathrm{Q}(t)).$$

Par injectivité de $\mathcal{F}$, on obtient

$$\partial_t(u_0 \star \mathrm{Q}) - \Delta(u_0 \star \mathrm{Q}) = 0$$

donc u est solution de (5.4).

Il reste à montrer l'unicité de la solution. Par linéarité de (5.4), il suffit de montrer que si $v \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}_+, \mathscr{S}')$ vérifie $v(0) = 0$ et $\partial_t v = \Delta v$ on a $v(t) = 0$ pour tout t. Soit donc un tel v, et soit $\chi \in \mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. On a $\partial_t \widehat{v(t)} = -|\xi|^2 \widehat{v(t)}$. Pour toute $\varphi \in \mathscr{S}$, l'application

$$\Phi : t \mapsto \mathrm{P}(-t)\chi\varphi$$

est dans $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}_+, \mathscr{S})$ avec $\partial_t \Phi(t) = |\xi|^2 \Phi(t)$ (notons qu'ici il est important que χ soit à support compact car $\mathrm{P}(-t) : \xi \mapsto \exp(t|\xi|^2)$ n'appartient pas à $\mathscr{S}$!). La proposition 5.1.6 implique alors

$$\partial_t \big\langle \mathrm{P}(-t)\chi\widehat{v(t)}, \varphi \big\rangle = \partial_t \big\langle \widehat{v(t)}, \Phi(t) \big\rangle = \big\langle -|\xi|^2 \widehat{v(t)}, \Phi(t) \big\rangle + \big\langle \widehat{v(t)}, |\xi|^2 \Phi(t) \big\rangle = 0.$$

Comme $\mathrm{P}(-0)\chi\widehat{v(0)} = 0$, il suit que $\mathrm{P}(-t)\chi\widehat{v(t)} = 0$ pour tout $t \geqslant 0$. En particulier on obtient $\chi\widehat{v(t)} = \mathrm{P}(t)\mathrm{P}(-t)\chi\widehat{v(t)} = 0$. La fonction $\chi \in \mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ étant arbitraire on en déduit $\widehat{v(t)} = 0$, ce qui conclut la démonstration. □

5.3 Équation de Schrödinger

5.3.1 Modèle physique

Le quanta de lumière

En 1865, Maxwell prédit que la lumière est une onde électromagnétique

$$\psi(x,t) = A \exp(ik \cdot x - \omega t), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{5.7}$$

ce qui est confirmé expérimentalement par Hertz en 1888. Ici A est l'amplitude de l'onde, $k \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'onde et $\omega = \omega(k) \in \mathbb{R}$ est la fréquence angulaire. Dans le cadre de la théorie ondulatoire, l'énergie d'une onde lumineuse dépend seulement de l'amplitude de l'onde. Or, certaines expériences laissent penser que l'énergie transférée de la lumière à la matière dépend de la fréquence (et pas de l'amplitude). C'est le cas de l'effet photoélectrique : quand on excite une plaque de métal avec de la lumière, les électrons ne sont éjectés que pour des fréquences assez élevées, et l'énergie des électrons est alors fonction de la fréquence. En 1900, Planck postule alors qu'une onde de lumière de fréquence ω ne peut échanger de l'énergie avec la matière que par petits paquets, ou *quanta*, d'énergie

$$E = \hbar\omega \tag{5.8}$$

avec $\hbar = h/2\pi$, où $h \approx 6,62607015 \times 10^{-34} \mathrm{m}^2.\mathrm{kg}.\mathrm{s}^{-1}$ est une constante introduite par Planck, qui porte maintenant son nom. Cette hypothèse permet à Planck de vérifier théoriquement les résultats bien connus expérimentalement sur le rayonnement du corps noir. En 1905, Einstein change de paradigme et émet l'hypothèse que c'est en fait la lumière elle-même qui est constituée de quanta, appelés aujourd'hui *photons*. Ceci lui permet d'expliquer l'effet photoélectrique. Contrairement à l'onde lumineuse (5.7), un photon est localisé en espace et en fréquence, et peut être représenté par une superposition d'ondes planes, ou paquet d'ondes, de la forme

$$\Psi(x,t) = (2\pi)^{-n} \int \widehat{\Psi}(k) \exp(ik \cdot x - \omega t) \mathrm{d}k, \tag{5.9}$$

où $\widehat{\Psi}$ est la transformée de Fourier de $\Psi(x,0)$.

Propagation des paquets d'ondes

On veut trouver, pour tout vecteur d'onde k, la valeur de $\omega = \omega(k)$ de sorte que l'onde $A\exp(ik\cdot x)$ évolue sous la forme (5.7) au temps t. Pour ce faire, supposons qu'on parte d'un paquet d'onde initial de la forme

$$\Psi_\varepsilon(x,0) = \exp(-\varepsilon|x|^2)\exp(ik\cdot x),$$

avec $\varepsilon > 0$ petit. Quand $\varepsilon \to 0$, les variations de $\exp(ik\cdot x)$ se font à une échelle très petite par rapport à la taille de l'enveloppe $\exp(-\varepsilon|x|^2)$. L'équation (5.9) se réécrit alors

$$\Psi_\varepsilon(x,t) = (2\pi)^{-n}\left(\frac{\pi}{\varepsilon}\right)^{n/2} \int e^{-|\eta|^2/4\varepsilon} \exp\big(i(k+\eta)\cdot x - \omega(k+\eta)t\big)\mathrm{d}\eta.$$

En écrivant $\omega(k+\eta) = \omega(k) + \nabla\omega(k)\cdot\eta + \mathcal{O}(|\eta|^2)$, on peut montrer que pour tous t, x on a un développement

$$\Psi_\varepsilon(x,t) = e^{i(k\cdot\nabla\omega(k)-\omega(k))t}\Psi_\varepsilon\left(x - \nabla\omega(k)t, 0\right) + \mathcal{O}\left(\sqrt{\varepsilon}e^{-1/(4\sqrt{\varepsilon})}\right)$$

quand $\varepsilon \to 0$. Autrement dit, dans l'approximation où la taille de l'enveloppe est grande devant les oscillations, on obtient que notre paquet d'onde se déplace à une vitesse $\xi = \nabla\omega(k)$: c'est la vitesse de déplacement du paquet d'onde. Dans le cas d'un photon dans le vide, on doit donc avoir $|\nabla\omega(k)| = c$ la vitesse de la lumière. On peut supposer que $\omega(0) = 0$ et que $\omega(k)$ ne dépend que de $|k|$; cela donne finalement la relation de dispersion

$$\omega(k) = c|k|.$$

Ainsi l'onde lumineuse (5.7) satisfait

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = \Delta\psi.$$

C'est l'équation des ondes électromagnétiques dans le vide.

De Broglie et les ondes de matière

En 1924, de Broglie (au même moment que Davisson et Germer outre Atlantique) postule que la matière comporte aussi des caractéristiques ondulatoires, et qu'à toute particule libre de masse m, on peut associer une onde de matière de la forme (5.7). Il obtient la relation de dispersion en raisonnant par analogie avec le cas du photon. La particule doit avoir une énergie E donnée par (5.8), c'est-à-dire $E = \hbar\omega$. Cette énergie doit coïncider avec son énergie cinétique qu'on lui attribue en mécanique classique, soit

$$E = m|v|^2/2$$

où v est la vitesse de la particule. Or on a vu que la vitesse de propagation d'un paquet d'onde qui oscille dans la direction k se déplace à une vitesse $v = \nabla\omega(k)$. On obtient alors

$$\hbar\,\omega(k) = \frac{1}{2}m|\nabla\omega(k)|^2.$$

Compte tenu du fait que ω ne dépend que de $|k|$ et que $\omega(0) = 0$, on obtient

$$\omega(k) = \frac{\hbar}{2m}|k|^2.$$

Il suit que l'onde de matière (5.7) satisfait

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{-\hbar^2}{2m}\Delta\psi.$$

C'est l'équation de Schrödinger pour une particule libre dans le vide.

5.3.2 Solutions de l'équation de Schrödinger

Théorème 5.3.1. *Pour tout $u_0 \in \mathscr{S}'$, il existe une unique solution $u \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathscr{S}')$ telle que*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{i\hbar}{2}\Delta u \quad \text{et} \quad u(0) = u_0.$$

La solution s'écrit $u(t) = u_0 \star A(t)$ où $A(t) \in \mathscr{S}'$ est donnée par

$$A(t) = (2\pi\hbar|t|)^{-n/2}e^{-in\pi\,\mathrm{sgn}(t)/4}\exp\left(i\frac{|x|^2}{2\hbar t}\right)$$

pour $t \neq 0$ et $A(0) = \delta_0$.

Remarque 5.3.2. A priori, le produit de convolution $u_0 \star A(t)$ n'a pas de sens car $A(t)$ n'est pas à support compact si t est non nul. En revanche, on a que $\widehat{A(t)}$ est une fonction de $\mathscr{C}_b^\infty(\mathbb{R}^n)$ pour tout t de sorte que le produit $\widehat{u}_0 \cdot \widehat{A(t)}$ a du sens. On définit alors

$$u_0 \star A(t) = \mathcal{F}^{-1}\left(\widehat{u}_0 \cdot \widehat{A(t)}\right).$$

Démonstration. Supposons qu'il existe une solution $u(t)$. En prenant la transformée de Fourier, on obtient

$$\partial_t \widehat{u(t)} = -\frac{i\hbar|\xi|^2}{2}\widehat{u(t)}.$$

Alors en procédant comme dans la démonstration du théorème 5.2.1, on déduit

$$\widehat{u(t)} = \widehat{u_0}\exp(-it\hbar|\xi|^2/2)$$

au sens des distributions. On obtient finalement

$$u(t) = u_0 \star A(t)$$

où $A(t) = \mathcal{F}^{-1}B(t) \in \mathscr{S}'$ avec $B(t)$ donnée par $B(t)(\xi) = \exp(-it\hbar|\xi|^2/2)$. Pour $z \in \mathbb{C}_{>0}$ on a

$$\mathcal{F}^{-1}\left(\exp(-z|\xi|^2)\right) = (2\pi)^{-n}\mathcal{J}\mathcal{F}\left(\exp(-z|\xi|^2)\right) = (2\pi)^{-n}\frac{\pi^{n/2}}{z^{n/2}}\exp(-|x|^2/4z).$$

Soit $t \in \mathbb{R}^*$. En prenant $z = \varepsilon + it\hbar/2$ et en faisant $\varepsilon \to 0$, on obtient par convergence dominée

$$A(t)(x) = (4\pi)^{-n/2}(it\hbar/2)^{-n/2}\exp(-|x|^2/2it\hbar),$$

au sens des distributions, ce qui conclut la démonstration puisqu'on a l'égalité $(it)^{-n/2} = |t|^{-n/2}\exp(-in\pi\,\mathrm{sgn}(t)/4)$. □

Remarque 5.3.3. La solution de l'équation de Shrödinger est celle de l'équation de la chaleur quand on remplace t par $\dfrac{it\hbar}{2}$.

5.3.3 Propagation des paquets d'ondes

On considère un paquet d'ondes gaussien, localisé en $(x,\xi) \in \mathbb{R}^{2n}$,

$$\Phi_{x,\xi}(y) = \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{2\hbar}\right)\exp(i\xi\cdot(y-x)/\hbar), \quad y \in \mathbb{R}^n.$$

Proposition 5.3.4. *Le propagé de $\Phi_{x,\xi}$ est donné par*

$$e^{it\hbar\Delta/2}\Phi_{x,\xi} = \frac{e^{-it|\xi|^2/2}}{\sigma(t)^{n/2}}\Phi^{\sigma(t)}_{x+t\xi,\xi}$$

avec $\sigma(t) = 1 + it$ et où on a noté pour $\sigma \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$

$$\Phi^{\sigma}_{x,\xi}(y) = \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{2\hbar\sigma}\right)\exp(i\xi\cdot(y-x)/\hbar).$$

Ainsi le paquet d'onde $\Phi_{x,\xi}$ se déplace dans à la vitesse ξ, et s'étale à mesure que le temps augmente.

Démonstration. On écrit

$$\Phi_{x,\xi}(y) = (2\pi\hbar)^{-n/2} \int e^{-|\eta|^2/2\hbar} e^{i(\xi+\eta)\cdot(y-x)/\hbar} \mathrm{d}\eta$$

ce qui donne

$$e^{it\hbar\Delta/2}\Phi_{x,\xi}(y,\eta) = (2\pi\hbar)^{-n/2} \int e^{-|\eta|^2/2\hbar} \exp\left(i\frac{(\xi+\eta)\cdot(y-x) - it|\xi+\eta|^2/2}{\hbar}\right) \mathrm{d}\eta.$$

En écrivant $|\xi+\eta|^2 = |\xi|^2 + |\eta|^2 - 2\eta\cdot\xi$ on voit que c'est encore une fois la transformée de Fourier d'une gaussienne, et on trouve

$$e^{-it|\xi|^2/2\hbar}(1+it)^{-n/2} \exp\left(-\frac{|x-(y-t\xi)|^2}{2\hbar(1+it)}\right) \exp(i\xi\cdot(y-x)/\hbar).$$

On conclut en écrivant $\exp(i\xi\cdot(y-x)/\hbar) = \exp(i\xi\cdot(y-t\xi-x))\exp(it|\xi|^2/\hbar)$. □

5.4 Équation des ondes

On a vu au paragraphe 5.3.1 qu'une onde lumineuse $\psi(x,t)$ satisfait l'équation des ondes

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = \Delta\psi.$$

où c est la vitesse de la lumière. Elle est aussi appelée *équation de D'alembert* : ce dernier l'a établie pour une corde vibrante en 1746 en assimilant la corde à des masses ponctuelles liées par des ressorts ; dans ce cas, il obtient la même équation que ci-dessus, avec la vitesse c remplacée par $\sqrt{T\ell/m}$, où T est la tension de la corde, ℓ sa longueur et m sa masse.

5.4.1 Solution de l'équation des ondes

Théorème 5.4.1. *Soient $u_0, u_1 \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$. Alors il existe une unique solution $u \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathscr{S}')$ telle que*

$$\partial_t^2 u = \Delta u, \quad u(0) = u_0 \quad et \quad \partial_t u(0) = u_1.$$

Celle-ci est donnée par

$$u(t) = \cos\left(t\sqrt{-\Delta}\right) u_0 + \frac{\sin\left(t\sqrt{-\Delta}\right)}{\sqrt{-\Delta}} u_1, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{5.10}$$

Les opérateurs dans la formule ci-dessus sont définis dans l'espace de Fourier par

$$\mathcal{F}\left[\cos\left(t\sqrt{-\Delta}\right)f\right] = \cos(t|\xi|)\widehat{f} \quad \text{et} \quad \mathcal{F}\left[\frac{\sin\left(t\sqrt{-\Delta}\right)}{\sqrt{-\Delta}}f\right] = \frac{\sin(t|\xi|)}{|\xi|}\widehat{f}$$

pour toute $f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ — ceci est bien défini puisque pour tout $t \in \mathbb{R}$, les fonctions

$$\alpha_t : \xi \mapsto \cos(t|\xi|) \quad \text{et} \quad \beta_t : \xi \mapsto \sin(t|\xi|)/|\xi|$$

sont lisses et toutes leurs dérivées sont bornées sur $\mathbb{R}^n$. On notera plus simplement

$$A(t) = \mathcal{F}^{-1}\mathrm{M}_{\alpha(t)}\mathcal{F} \quad \text{et} \quad B(t) = \mathcal{F}^{-1}\mathrm{M}_{\beta(t)}\mathcal{F}$$

où pour toute fonction f, l'opérateur $\mathrm{M}_f : \mathscr{S} \to \mathscr{S}$ est l'opérateur de multiplication $u \mapsto fu$.

Démonstration du théorème 5.4.1. On a $\partial_t\beta(t) = \alpha(t)$ et $\partial_t\alpha(t) = -|\xi|^2\beta(t)$, de sorte que

$$\partial_t^2 A(t) = \Delta A(t) \quad \text{et} \quad \partial_t^2 B(t) = \Delta B(t).$$

Par suite, (5.10) définit bien une solution à l'équation des ondes. Il suffit à présent de vérifier l'unicité. Par linéarité, il suffit de montrer que si $u(t)$ est une solution telle que

$$u(0) = \partial_t u(0) = 0 \tag{5.11}$$

alors $u(t) = 0$ pour tout t. Soit donc $u(t)$ une solution vérifiant (5.11), et donnons-nous $\chi \in \mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. On pose $v(t) = \widehat{u(t)}$ et $f(t) = \langle v(t), \chi\rangle$. Puisque u est solution, on a $\partial_t^2 v(t) = -|\xi|^2 v(t)$ et tout $\ell \in \mathbb{N}$, on a

$$\partial_t^{2\ell} f(t) = (-1)^\ell \left\langle v(t), -|\xi|^{2\ell}\chi\right\rangle \quad \text{et} \quad \partial_t^{2\ell+1} f(t) = (-1)^\ell \left\langle v'(t), |\xi|^{2\ell}\chi\right\rangle. \tag{5.12}$$

Soient $T > 0$ et $R > 0$ avec $\operatorname{supp}\chi \subset \{|\xi| \leqslant R\}$. Puisque $v \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathscr{S}')$, la remarque 5.1.3 donne l'existence de constantes $C, N > 0$ dépendant de T telles que pour $k \in \mathbb{N}$ et $\ell = \lfloor k/2 \rfloor$, on a

$$\sup_{|t|\leqslant T} |\partial_t^k f(t)| \leqslant C \sup_{|\xi|\leqslant R} \sum_{|\alpha|,|\beta|\leqslant N} \left|\xi^\alpha \partial_\xi^\beta \left(-|\xi|^{2\ell}\chi(\xi)\right)\right|.$$

On en déduit qu'il existe $D > 0$ tel que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\sup_{|t|\leqslant T} |\partial_t^k f(t)| \leqslant D^{k+1}.$$

La formule de Taylor assure alors que f est développable en série entière sur $[-T, T]$. Mais par (5.11) et (5.12), on a

$$\partial_t^k f(0) = 0, \quad k \in \mathbb{N}.$$

On en déduit que $f(t) = 0$ pour $t \in [-T, T]$. Comme $T > 0$ et χ sont arbitraires, on a obtenu

$$\langle v(t), \chi \rangle = 0, \quad t \in \mathbb{R}, \quad \chi \in \mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Par densité de $\mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ dans $\mathscr{S}'$, on obtient $v(t) = 0$ pour tout t, donc $u = 0$. Ceci conclut la démonstration de l'unicité. □

5.5 Espaces de Sobolev

5.5.1 Définition et premières propriétés

Pour $s \in \mathbb{R}$, l'espace de Sobolev d'ordre s sur $\mathbb{R}^n$ est défini par

$$H^s(\mathbb{R}^n) = \left\{ u \in \mathscr{S}' \ : \ \langle \xi \rangle^s \hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n) \right\}.$$

L'espace $H^s(\mathbb{R}^n)$, muni du produit scalaire

$$\langle u, v \rangle_{H^s} = \int \hat{u}(\xi) \overline{\hat{v}(\xi)} \langle \xi \rangle^{2s} \mathrm{d}\xi, \quad u, v \in H^s(\mathbb{R}^n),$$

est un espace de Hilbert. La norme associée est

$$\|u\|_{H^s} = \|\langle \xi \rangle^s \widehat{u}\|_{L^2}.$$

Notons que puisque $\mathcal{F}$ est une isométrie $L^2 \to L^2$, on a $H^0(\mathbb{R}^n) = L^2$.

Exemple 5.5.1. (i) La masse de Dirac δ_0 appartient à $H^s(\mathbb{R}^n)$ ssi $s < -n/2$. En effet $\widehat{\delta_0} = \mathbf{1}$ donc $\delta_0 \in H^s(\mathbb{R}^n)$ si et seulement si $\langle \xi \rangle^s \in L^2$. Après changement de coordonnées polaires, cette condition équivaut à ce que $r \mapsto \langle r \rangle^{2s} r^{n-1}$ soit intégrable sur $\mathbb{R}_+$, soit $2s + n < 0$.

(ii) La fonction $\mathbf{1}$ n'appartient à aucun des $H^s(\mathbb{R}^n)$: $\widehat{\mathbf{1}} = (2\pi)^n \delta_0$, donc quel que soit $s \in \mathbb{R}$, on a $\langle \xi \rangle^s \widehat{\mathbf{1}} = (2\pi)^n \delta_0 \notin L^2$.

Les espaces H^s mesurent non seulement la décroissance des distributions à l'infini, mais aussi leur régularité, comme le montre la proposition suivante.

Proposition 5.5.2. *Soient $s \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{N}^n$ et $k \in \mathbb{N}$.*

(i) *L'espace $\mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ est dense dans H^s.*

(ii) *La dérivation ∂^α envoie H^s sur $H^{s-|\alpha|}$ et on a*

$$\|\partial^\alpha u\|_{H^{s-|\alpha|}} \leqslant \|u\|_{H^s}, \quad u \in H^s(\mathbb{R}^n).$$

(iii) *Pour $s = k \in \mathbb{N}$, on a*

$$H^k(\mathbb{R}^n) = \big\{u \in L^2(\mathbb{R}^n) \ : \ \partial^\beta u \in L^2 \textit{ pour tout } \beta \in \mathbb{N}^n \textit{ avec } |\beta| \leqslant k\big\}$$

et de plus on a l'égalité

$$\|u\|_{H^k}^2 = \sum_{|\beta|\leqslant k} \|\partial^\beta u\|_{L^2}^2, \quad u \in H^k(\mathbb{R}^n). \tag{5.13}$$

Démonstration. Commençons par le point (iii). Soit $u \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Remarquons que pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$ on a

$$\langle\xi\rangle^{2k} = \Big(1 + \sum_j |\xi_j|^2\Big)^k = \sum_{|\beta|\leqslant k} \prod_{j=1}^n |\xi_j|^{2\beta_j} = \sum_{|\beta|\leqslant k} |\xi^\beta|^2.$$

On en déduit que

$$\|u\|_{H^k}^2 = \int \langle\xi\rangle^{2k} |\widehat{u}(\xi)|^2 \mathrm{d}\xi = \sum_{|\beta|\leqslant k} \int |\xi^\beta|^2 |\widehat{u}(\xi)|^2 \mathrm{d}\xi = \sum_{|\beta|\leqslant k} \|\partial^\beta u\|_{L^2}^2.$$

La deuxième égalité montre qu'une distribution $u \in L^2$ appartient à H^k si et seulement si pour tout $|\beta| \leqslant k$ on a $\xi^\beta \widehat{u} \in L^2$, ce qui revient à demander que $\partial^\beta u \in L^2$.

Montrons maintenant (i). Soit $s \in \mathbb{R}$ et $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$ de sorte que $\langle\xi\rangle^s \widehat{u} \in L^2$. Soit $\chi \in \mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ telle que $\chi(\eta) = 1$ pour tout $|\eta| \leqslant 2$. Posons $\chi_\ell = \chi(\cdot/\ell)$ pour $\ell \in \mathbb{N}^*$. Alors on a $\chi_\ell \langle\xi\rangle^s \widehat{u} \to \langle\xi\rangle^s \widehat{u}$ dans L^2, ce qui équivaut à $u_\ell \to u$ dans H^s, où on a noté $u_\ell = \mathcal{F}^{-1}(\chi_\ell \widehat{u})$. Soit $\varepsilon > 0$ et ℓ tels que $\|u_\ell - u\|_{H^s} < \varepsilon/2$. Puisque $\chi_\ell \widehat{u}$ est à support compact, u_ℓ est une fonction $\mathscr{C}^\infty$, et pour tout $\beta \in \mathbb{N}^n$ on a $\xi^\beta \widehat{u}_\ell \in L^2$ de sorte que $\partial^\beta u_\ell \in L^2$. Par ailleurs, si $\beta \in \mathbb{N}^n$ on a

$$\partial^\beta(\chi_m u_\ell) - \partial^\beta u_\ell = (\chi_m - 1)\partial^\beta u_\ell + \sum_{0\neq\gamma\leqslant\beta} c_\gamma \partial^\gamma \chi_m \partial^{\beta-\gamma} u_\ell.$$

Si $|x| \leqslant m$, on a $(\chi_m - 1)(x) = 0$ et $\partial^\gamma \chi_m(x) = 0$ pour tout $0 \neq \gamma$. Il suit que $\partial^\beta(\chi_m u_\ell) \to \partial^\beta u_\ell$ dans L^2 quand $m \to \infty$. Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $N \geqslant s$. Par le point (iii), il vient

$$\|\chi_m u_\ell - u_\ell\|_{H^s}^2 \leqslant \|\chi_m u_\ell - u_\ell\|_{H^N}^2 = \sum_{|\beta|\leqslant N} \|\partial^\beta(\chi_m u_\ell) - \partial^\beta u_\ell\|_{L^2}^2.$$

On a vu que le terme de droite tendait vers 0 quand $m \to \infty$ et donc on obtient que $\|\chi_m u_\ell - u_\ell\|_{H^s} < \varepsilon/2$ si m est assez grand. Pour un tel m, on a $\|\chi_m u_\ell - u\|_{H^s} < \varepsilon$. Puisque $\chi_m u_\ell \in \mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ cela montre bien que $\mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ est dense dans H^s.

Montrons finalement le point (ii). Si $u \in H^s$, alors $\langle\xi\rangle^s \widehat{u} \in L^2$. Mais alors

$$\|\langle\xi\rangle^{s-|\alpha|} \mathcal{F}\partial^\alpha u\|_{L^2} = \|\langle\xi\rangle^{s-|\alpha|} (i\xi)^\alpha \widehat{u}\|_{L^2} \leqslant \|\langle\xi\rangle^s \widehat{u}\|_{L^2}$$

où on a utilisé $|\xi^\alpha| \ \langle\xi\rangle^{s-|\alpha|} \leqslant 1$ dans la dernière inégalité. Ce calcule implique que $\partial^\alpha u \in H^{s-|\alpha|}$ et on a bien l'inégalité annoncée. □

5.5.2 Injections de Sobolev

THÉORÈME 5.5.3. *Si $k \in \mathbb{N}$ et $s > n/2 + k$ on a une injection*

$$H^s(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathscr{C}_0^k(\mathbb{R}^n),$$

où $\mathscr{C}_0^k(\mathbb{R}^n)$ est l'espace des fonctions $\mathscr{C}^k$ sur $\mathbb{R}^n$ dont toutes les dérivées d'ordre $\leqslant k$ tendent vers 0 à l'infini.

Démonstration. Soient $k \in \mathbb{N}$, $s > n/2 + k$ et $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$. On a, au sens des distributions, $u = \mathcal{F}^{-1}v$ avec $v = \widehat{u} \in \langle\xi\rangle^{-s}L^2$. Pour presque tout $\xi \in \mathbb{R}^n$, la fonction $\varphi_\xi : x \mapsto v(\xi)e^{ix\cdot\xi}$ est $\mathscr{C}^k$ et pour tout $|\alpha| \leqslant k$ il existe $C_\alpha > 0$ tel que

$$|\partial_x^\alpha \varphi_\xi| \leqslant C_\alpha |\widehat{u}(\xi)| \langle\xi\rangle^k, \quad x, \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Comme $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$ on a

$$\int \langle\xi\rangle^k |\widehat{u}| \mathrm{d}\xi \leqslant \|\langle\xi\rangle^s \widehat{u}\|_{L^2} \|\langle\xi\rangle^{k-s}\|_{L^2} < \infty$$

où on a utilisé $2(k-s) < -n$. Par le théorème de dérivation sous le signe intégral, on obtient que la fonction $\widetilde{u}$ définie par

$$\widetilde{u}(x) = (2\pi)^{-n} \int \widehat{u}(\xi) e^{ix\cdot\xi} \mathrm{d}\xi, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

est de classe $\mathscr{C}^k$, et pour tout $|\alpha| \leqslant k$ on a $\partial^\alpha \widetilde{u}(x) = \mathcal{F}^{-1}\left((i\xi)^\alpha \widehat{u}\right)$. Ce qui précède implique que $(i\xi)^\alpha \widehat{u} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ donc $\partial^\alpha \widetilde{u}(x) \to 0$ quand $x \to \infty$ par le lemme de Riemann-Lebesgue. Enfin on a $u = \mathcal{F}^{-1}\widehat{u} = \widetilde{u}$ dans $\mathscr{S}'$, donc $u \in \mathscr{C}_0^k(\mathbb{R}^n)$. □

5.6 Équations d'évolutions sur les espaces de Sobolev

Dans cette section, on étudie l'action des trois propagateurs sur les espaces de Sobolev.

5.6.1 Propagateur de la chaleur

Si $u \in \mathscr{S}'$, on a

$$\|e^{t\Delta}u\|_{L^2} = (2\pi)^{-n/2} \|\mathcal{F}e^{t\Delta}u\|_{L^2} = (2\pi)^{-n/2} \left(\int e^{-2t|\xi|^2} |\widehat{u}(\xi)|^2 \mathrm{d}\xi \right)^{1/2}$$

et la convergence dominée donne $e^{t\Delta}u \to 0$ dans L^2 quand $t \to \infty$. Si la vitesse de dissipation n'est pas contrôlée par la norme L^2 de u, on peut en revanche borner sa norme $\mathscr{C}^k$ en fonction de n'importe quelle norme H^s, comme suit.

Proposition 5.6.1. *Pour tous $k \in \mathbb{N}$ et $s \in \mathbb{R}$, il existe $C > 0$ qui dépend de n et $k - s$ telle que*

$$\|e^{t\Delta}u\|_{\mathscr{C}^k} \leqslant C\|u\|_{H^s}\sqrt{f(t)}, \quad t \geqslant 0, \quad u \in \mathscr{S}',$$

où $f(t) = 1 + t^{s-k-n/2}$ si $t \leqslant 1$ et $f(t) = 2\langle t\rangle^{-n/2}$ si $t > 1$.

Démonstration. Si $|\alpha| \leqslant k$ on a

$$\left|\partial_x^\alpha e^{t\Delta}u(x)\right| \leqslant (2\pi)^{-n}\int |\xi^\alpha| e^{-t|\xi|^2}|\widehat{u}(\xi)|\mathrm{d}\xi \leqslant (2\pi)^{-n}\|\langle\xi\rangle^s\widehat{u}\|_{L^2}\|\langle\xi\rangle^{k-s}e^{-t|\xi|^2}\|_{L^2}.$$

Le carré de la dernière norme du terme de droite s'écrit

$$\|\langle\xi\rangle^{k-s}e^{-t|\xi|^2}\|_{L^2}^2 = \int e^{-2t|\xi|^2}\langle\xi\rangle^{2(k-s)}\mathrm{d}\xi = \mathrm{vol}(\mathbb{S}^{n-1})\int_0^\infty e^{-2tr^2}\langle r\rangle^{2(k-s)}r^{n-1}\mathrm{d}r.$$

On écrit $\int_0^\infty e^{-2tr^2}\langle r\rangle^{2(k-s)}r^{n-1}\mathrm{d}r = \int_0^1 + \int_1^\infty$. L'intégrale sur $[0,1]$ est contrôlée par

$$2^{|k-s|}\int_0^1 e^{-tr^2}r^{n-1}\mathrm{d}r \leqslant C_0\langle t\rangle^{-n/2},$$

où C_0 ne dépend que de $k - s$ (on a utilisé $\langle r\rangle^2 \leqslant 2$ pour $r \leqslant 1$). Pour l'autre intégrale, on écrit

$$\begin{aligned}\int_1^\infty e^{-2tr^2}\langle r\rangle^{2(k-s)}r^{n-1}\mathrm{d}r &= 2^{|k-s|}t^{s-k-n/2}\int_{\sqrt{t}}^\infty e^{-2u^2}u^{2(k-s)+n-1}\mathrm{d}u \\ &\leqslant 2^{|k-s|}t^{s-k-n/2}e^{-2t}\int_{\sqrt{t}}^1 u^{2(k-s)+n-1}\mathrm{d}u + C_1t^{s-k-n/2}e^{-t}\end{aligned}$$

où C_1 ne dépend que de $k - s$. On obtient

$$\int_1^\infty e^{-2tr^2}\langle r\rangle^{2(k-s)}r^{n-1}\mathrm{d}r \leqslant C_2(1 + t^{s-k-n/2})e^{-t}.$$

avec C_2 qui ne dépend que de $k - s$. En remarquant finalement que

$$C_0\langle t\rangle^{n/2} + C_2(1 + t^{s-k-n/2})e^{-t} \leqslant Cf(t)$$

avec C qui dépend C_0 et C_2 on conclut la démonstration. □

5.6.2 Propagateur de Schrödinger

La proposition suivante montre que contrairement à l'équation de la chaleur, le propagateur de Schrödinger réalise une isométrie sur les espaces de Sobolev : il n'y a pas de perte d'énergie.

Proposition 5.6.2. *Pour tout $s \in \mathbb{R}$ et tout $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$ on a*

$$\|e^{it\hbar\Delta/2}u\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} = \|u\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}.$$

Démonstration. En effet, on a

$$\mathcal{F}e^{it\hbar\Delta/2}u = e^{-it\hbar|\xi|^2/2}\mathcal{F}u$$

d'où l'on tire

$$\|e^{it\hbar\Delta/2}u\|_{H^s} = \|\langle\xi\rangle^s\mathcal{F}e^{it\hbar\Delta/2}u\|_{L^2} = \|\langle\xi\rangle^s\mathcal{F}u\|_{L^2} = \|u\|_{H^s},$$

ce qui est bien le résultat voulu. $\square$

Bibliographie

[1] Claude Gasquet and Paul Witomski. Fourier analysis and applications. vol. 30 of texts in applied mathematics, 1999.

[2] L. Hörmander. *The Analysis of Linear Partial Differential Operators I : Distribution Theory and Fourier Analysis*. Classics in Mathematics. Springer Berlin Heidelberg, 2015.

[3] Hervé Queffélec and Martine Queffélec. Analyse complexe et applications. *Calvage & Mounet*, 39 :69–92, 2017.

[4] W. Rudin. *Functional Analysis*. International series in pure and applied mathematics. McGraw-Hill, 1991.

[5] Walter Rudin. Real and complex analysis. 1974.

[6] E.M. Stein and R. Shakarchi. *Fourier Analysis : An Introduction*. Princeton University Press, 2003.

[7] M.E. Taylor. *Partial Differential Equations : Basic Theory*. Applied mathematical sciences. Springer, 1996.