École Normale Supérieure
2021/2022

Yann Chaubet
chaubet@dma.ens.fr

# Systèmes dynamiques
# Corrigé 2

## Exercice 1. *Familles d'applications transitives*

Soit $(U_k)_{k\in\mathbf{N}}$ une base d'ouverts de $X$. Pour tous $k, i \in \mathbf{N}$, l'ensemble

$$A_{i,k} = \bigcup_{n\in\mathbf{N}} f_i^{-n}(U_k)$$

est un ouvert dense, par transitivité des $f_i$. Dès lors l'ensemble

$$Y = \bigcap_{i\in\mathbf{N}} \bigcap_{k\in\mathbf{N}} A_{i,k}$$

est dense, par le théorème de Baire, puisque $X$ est localement compact. Tout élément $y \in Y$ vérifie donc que son orbite $\mathcal{O}_+(y)$ est dense dans $X$. Comme $X$ est séparé et qu'il n'a pas de points isolés, cela implique que pour tout $p \geqslant 1$, l'ensemble

$$\mathcal{O}_{+,p}(y) = \{f^k(y) \ : \ k \geqslant p\}$$

est dense (en effet, dans un espace séparé et sans points isolés, si une suite $\{u_n \ : \ n \geqslant 0\}$ est dense, alors la suite $\{u_n \ : \ n \geqslant 1\}$ est aussi dense). Ainsi on a que

$$y \in \bigcap_{p\geqslant 1} \overline{\mathcal{O}_{+,p}(y)} = \omega(y),$$

c'est-à-dire $y$ est récurrent.

## Exercice 2. *Transformations minimales*

1. Soient $U, V$ deux ouverts non vides, et $Y = \overline{\bigcup_{n\geqslant 1} f^n(V)}$. Alors $Y$ est fermé et $f(Y) \subset Y$ ; ainsi $Y = X$ et il existe $n \in \mathbf{N}$ tel que $f^n(U) \cap V = \emptyset$.

2. Soit $\mathcal{F} = \{F \subset X,\ F$ est un fermé non vide tel que $f(F) \subset F\}$. Alors $\mathcal{F}$ est partiellement ordonné pour l'inclusion. Soit $\mathcal{C} \subset \mathcal{F}$ une famille totalement ordonnée. Alors

$$G = \bigcap_{F\in\mathcal{C}} F$$

est non vide. En effet, supposons que ce ne soit pas le cas. Alors $X = \bigcup_F \complement F$ et par compacité, il existe $F_1, \dots, F_N \in \mathcal{C}$ tels que

$$X = \bigcup_{i=1}^{N} \complement F_i.$$

Par suite $\bigcap_{j=1}^N F_j = \emptyset$, ce qui est absurde puisque la famille $\{F_1, \dots, F_N\}$ est totalement ordonnée.

Ainsi $G$ est non vide et c'est un minorant pour $\mathcal{C}$. Par le lemme de Zorn, il existe un élément minimal de $\mathcal{F}$, noté $Y$. Soit $F \subset Y$ un fermé non vide tel que $f(F) \subset F$. Alors $F = Y$ par minimalité de $Y$ et donc $f|_Y$ est minimale.

3. Soit $f : X \to X$ continue. Alors par la questions précédente, $f$ admet une partie fermée minimale non vide $Y$. Soit $y \in Y$ et $p \geqslant 1$ ; on considère $\mathcal{O}_{+,p}(y) = \{f^n(y) \;:\; n \geqslant p\}$. Alors $\overline{\mathcal{O}_{+,p}(y)}$ est une partie fermée non vide de $Y$, invariante par $f$. Par minimalité de $f|_F$, $\overline{\mathcal{O}_{+,p}(y)} = Y$ et en particulier
$$y \in \bigcap_{p \geqslant 1} \overline{\mathcal{O}_{+,p}(y)} = \omega(y).$$

## Exercice 3. *Ensemble non-errant*

1. Supposons que pour tout $n > m$, $f^n(U) \cap U = \emptyset$. Alors $x$ n'est pas périodique et il existe un voisinage $V$ de $x$ tel que $f^j(V) \cap V = \emptyset$ pour tout $j = 1, \ldots, m$ (en effet, on peut choisir des voisinages $U_i$ de $f^i(x)$ pour $i = 0, \ldots, m$, qui sont deux à deux disjoints, et considérer $V = \bigcap_i f^{-i}(U_i)$) Quitte à réduire $V$, on peut supposer $V \subset U$. On a donc $f^k(V) \cap V = \emptyset$ pour tout $k \in \mathbf{N}_{\geqslant 1}$ et $x \notin \Omega(f)$.

2. Soit $x \notin \Omega(f)$ et $U$ un voisinage ouvert de $x$ tel que $f^n(U) \cap U = \emptyset$ pour tout $n \geqslant 1$. Alors tout $y \in U$ est errant, et donc $\Omega(f)$ est fermé. Pour l'invariance, on raisonne par contraposition. Si $x \in X$ vérifie que $f(x) \notin \Omega(f)$, alors on peut trouver un voisinage $U$ de $f(x)$ tel que $f^n(U) \cap U = \emptyset$ pour tout $n \geqslant 1$. Mais alors $V = f^{-1}(U)$ est un voisinage de $x$ et on a
$$f(f^n(V) \cap V) \subset f^{n+1}(f^{-1}(U)) \cap U \subset f^n(U) \cap U = \emptyset$$
pour tout $n \geqslant 1$, ce qui implique que $f^n(V) \cap V = \emptyset$. Donc $x \notin \Omega(f)$.

   Enfin, soit $x \in X$ et $y \in \omega(x)$. Soit $U$ un voisinage ouvert de $y$. Alors il existe $m > n > 0$ tels que $f^m(x), f^n(x) \in U$. Il suit que $f^{m-n}(U) \cap U \neq \emptyset$, donc $y \in \Omega(f)$.

3. Pour $x \in \mathrm{Per}(f)$, l'orbite $\mathcal{O}_+(x)$ est un ensemble minimal et donc $\mathrm{Per}(f) \subset M(f)$.

   Soit $F \subset X$ un sous-ensemble minimal pour $f$. Alors tout point de $F$ est récurrent (cf. la question 3. de l'**Exercice 2.**) et donc $M(f) \subset R(f)$.

   Si $x$ est récurrent, on a $x \in \omega(x) \subset \Omega(f)$. Comme $\Omega(f)$ est fermé, on a $R(f) \subset \Omega(f)$.

## Exercice 4. *Entropie d'un flot*

La compacité de $X$ et la continuité de $\Phi|_{[0,1]\times X}$ donnent
$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta(\varepsilon) > 0, \quad \forall x, y \in X, \quad \mathrm{dist}(x,y) \leqslant \delta(\varepsilon) \implies \mathrm{d}_1^{\Phi}(x,y) \leqslant \varepsilon.$$
Pour $f : X \to X$, on rappelle que
$$\mathrm{d}_n^f(x,y) = \max\{\mathrm{d}(f^k(x), f^k(y)),\ k = 0, \ldots, n-1\}.$$
De plus, on peut supposer que $\delta(\varepsilon) \to 0$ quand $\varepsilon \to 0$. Par conséquent, puisque $\mathrm{d}_T^{\Phi} \geqslant \mathrm{d}_{\lfloor T \rfloor}^{\varphi^1}$, on a pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $T > 1$
$$B_{\mathrm{d}_{\lfloor T \rfloor}^{\varphi^1}}(x,\varepsilon) \supset B_{\mathrm{d}_T^{\Phi}}(x,\varepsilon) \supset B_{\mathrm{d}_{\lfloor T \rfloor}^{\varphi^1}}(x,\delta(\varepsilon)).$$
Ainsi, en notant pour toute application $f : X \to X$
$$M^f(n,\varepsilon) = \min\left\{m \geqslant 1,\ \exists x_1, \ldots, x_m \in X,\ \bigcup_{i=1}^{m} B_{d_n^f}(x_i,\varepsilon) = X\right\},$$

on a

$$M^{\varphi^1}(\lfloor T \rfloor, \varepsilon) \leqslant M^{\Phi}(T, \varepsilon) \leqslant M^{\varphi^1}(\lfloor T \rfloor, \delta(\varepsilon)),$$

où $M^{\Phi}(T, \varepsilon)$ est défini comme $M^f(n, \varepsilon)$ en remplaçant $\mathrm{d}_n^f$ par $\mathrm{d}_T^{\Phi}$. Il suit que

$$\limsup_n \frac{1}{n} \log M^{\varphi^1}(n, \varepsilon) \leqslant \limsup_T \frac{1}{T} \log M^{\Phi}(T, \varepsilon) \leqslant \limsup_n \frac{1}{n} \log M^{\varphi^1}(n, \delta(\varepsilon)),$$

ce qui conclut.

## Exercice 5. *Propriétés de l'entropie topologique*

On définit comme dans le cours, pour tout $f : X \to X$, tout $n \in \mathbf{N}_{\geqslant 1}$ et tout $\varepsilon > 0$,

$$C^f(n, \varepsilon) = \min \left\{ m \geqslant 1,\ \exists U_1, \ldots, U_m \subset X,\ \forall j,\ \operatorname{diam}_{\mathrm{d}_n^f}(U_i) \leqslant \varepsilon,\ X \subset \bigcup_{i=1}^{m} U_i \right\},$$

et

$$N^f(n, \varepsilon) = \max \left\{ m \in \mathbf{N},\ \exists x_1, \ldots, x_m \in X,\ \forall i \neq j,\ \mathrm{d}_n^f(x_i, x_j) \geqslant \varepsilon \right\}.$$

1. On a $C^f(n, \varepsilon) \geqslant C^{f|_\Lambda}(n, \varepsilon)$ pour tous $n, \varepsilon$, ce qui conclut.

2. Par la question précédente on a $h_{\mathrm{top}}(f_j) \leqslant h_{\mathrm{top}}(f)$ pour tout $j$. De plus, on a que

$$C^f(n, \varepsilon) \leqslant \sum_{i=1}^{m} C^{f|_{\Lambda_i}}(n, \varepsilon).$$

Ceci implique qu'il existe $i \in \{1, \ldots, m\}$ tel que

$$C^{f|_{\Lambda_i}}(n, \varepsilon) \geqslant \frac{1}{m} C^f(n, \varepsilon),$$

qui vérifie donc $h_{\mathrm{top}}(f|_{\Lambda_i}) \geqslant h_{\mathrm{top}}(f)$.

3. On a que $\mathrm{d}_n^{f^m} \leqslant \mathrm{d}_{mn-m+1}^f$ pour tous $m, n \geqslant 1$. Par suite, $M^{f^m}(n, \varepsilon) \leqslant M^f(mn - m + 1, \varepsilon) \leqslant M^f(mn, \varepsilon)$.

Par continuité de $f$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta(\varepsilon) > 0$ tel que $B(x, \delta(\varepsilon)) \subset B_{\mathrm{d}_m^f}(x, \varepsilon)$. Alors

$$\begin{aligned} B_{\mathrm{d}_n^{f^m}}(x, \delta(\varepsilon)) &= \bigcap_{i=0}^{n-1} f^{-im} B(f^{im}(x), \delta(\varepsilon)) \\ &\subset \bigcap_{i=0}^{n-1} f^{-im} B_{\mathrm{d}_m^f}(f^{im}(x), \varepsilon) \\ &= B_{\mathrm{d}_{mn}^f}(x, \varepsilon). \end{aligned}$$

Ici, on a utilisé que

$$B_{\mathrm{d}_n^f}(x) = \bigcap_{k=0}^{n-1} f^{-k} B(f^k(x), \varepsilon).$$

Il suit que $M^{f^m}(n, \delta(\varepsilon)) \geqslant M^f(mn, \varepsilon)$, et donc

$$M^f(mn, \varepsilon) \leqslant M^{f^m}(n, \delta(\varepsilon)) \leqslant M^f(mn, \delta(\varepsilon)),$$

ce qui donne $h_{\mathrm{top}}(f^m) = m h_{\mathrm{top}}(f)$.

Si $f$ est inversible on a $B_{\mathrm{d}_n^f}(x, \varepsilon) = B_{\mathrm{d}_n^{f^{-1}}}(f^{n-1}(x), \varepsilon)$ pour tous $n, x, \varepsilon$, ce qui conclut.

4. On a que $\mathrm{id} : (X, \mathrm{d}) \to (X, \mathrm{d}')$ est un homéomorphisme puisque d et d′ engendrent la même topologie. De plus $f \circ \mathrm{id} = \mathrm{id} \circ f$ donc les systèmes dynamiques topologiques $(X, \mathrm{d}, f)$ et $(X, \mathrm{d}', f)$ sont conjugués. Cela conclut par un théorème du cours.

5. On a que $B_{\mathrm{d}_n^{f\times g}}((x,y),\varepsilon) = B_{\mathrm{d}_n^f}(x,\varepsilon)\times B_{\mathrm{d}_n^g}(y,\varepsilon)$. Ceci implique que $M^{f\times g}(n,\varepsilon) \leqslant M^f(n,\varepsilon)M^g(n,\varepsilon)$, et donc $h_{\mathrm{top}}(f\times g) \leqslant h_{\mathrm{top}}(f) + h_{\mathrm{top}}(g)$.

   Soient $x_1, \ldots, x_m \in X$ (resp. $y_1, \ldots y_p \in Y$) tels que pour tous $1 \leqslant i \neq i' \leqslant m$ (resp. $1 \leqslant j \neq j' \leqslant p$) on ait $\mathrm{d}_n^f(x_i, x_j) \geqslant \varepsilon$ (resp. $\mathrm{d}_n^g(y_i, y_j) \geqslant \varepsilon$). Alors pour tous $(i,j) \neq (i', j')$ on a
$$\mathrm{d}_n^{f\times g}((x_i, y_j), (x_{i'}, y_{j'})) \geqslant \varepsilon.$$
   Par conséquent $N^{f\times g}(n,\varepsilon) \geqslant N^f(n,\varepsilon)N^g(n,\varepsilon)$, et donc $h_{\mathrm{top}}(f\times g) \geqslant h_{\mathrm{top}}(f) + h_{\mathrm{top}}(g)$.

## **Exercice 6.** *Entropie des transformations Lipschitziennes*

1. Soit $n \geqslant 1$. Il existe $c > 0$ telle que pour tout $\varepsilon > 0$ on a
$$c^{-1}\varepsilon^{-n} \leqslant M([0,1]^n, \varepsilon) \leqslant c\varepsilon^{-n}.$$
   Par suite
$$\frac{-c + n\log 1/\varepsilon}{\log 1/\varepsilon} \leqslant \frac{\log M([0,1]^n,\varepsilon)}{\log 1/\varepsilon} \leqslant \frac{n\log 1/\varepsilon}{\log 1/\varepsilon},$$
   ce qui conclut.

2. Soit $L > \max(1, L(f))$. Alors $\mathrm{d}(f(x), f(y)) \leqslant L\mathrm{d}(x,y)$ pour tous $x, y \in X$. Cela implique que
$$f^m\left(B(x, \varepsilon/L^n)\right) \subset B(f^m(x), \varepsilon), \quad 0 \leqslant m \leqslant n,$$
   et donc
$$B(x, \varepsilon/L^n) \subset \bigcap_{m=0}^{n-1} f^{-m}B(f^m(x), \varepsilon) = B_{\mathrm{d}_n^f}(x, \varepsilon), \quad \forall x, \varepsilon.$$
   Ainsi on obtient
$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\log M^f(n,\varepsilon) &\leqslant \frac{1}{n}\log M(X, \varepsilon/L^n)\\ &= \frac{\log(L^n/\varepsilon)}{n}\frac{\log M(X,\varepsilon/L^n)}{\log(L^n/\varepsilon)}\\ &= \left(\log L - \frac{\log\varepsilon}{n}\right)\frac{\log M(X,\varepsilon/L^n)}{\log(L^n/\varepsilon)}.\end{aligned}$$
   Puisque $\log L > 0$ on obtient
$$\limsup_n \frac{1}{n}M^f(n,\varepsilon) \leqslant \log(L)\mathrm{bdim}(X),$$
   et donc $h_{\mathrm{top}}(f) \leqslant \log(L)\mathrm{bdim}(X)$.

3. Par le cours, l'application doublante $E_2 : [x] \mapsto [2x]$ sur $X = S^1$ satisfait cette égalité, puisque $\mathrm{bdim}(S^1) = 1$, et $h_{\mathrm{top}}(E_2) = \log 2$.

## **Exercice 7.** *Entropie algébrique*

1. Soit $i \in \{1, \ldots, s\}$. et $m, n \geqslant 0$. Alors $F^n(\gamma_i)$ peut s'écrire
$$F^n(\gamma_i) = \lambda_1 \cdots \lambda_{L(n,\Gamma)}, \quad \lambda_j \in \Gamma.$$
On a donc
$$F^{m+n}(\gamma_i) = F^m(\lambda_1) \cdots F^m(\lambda_{L(n,\Gamma)}).$$
Chaque $F^m(\lambda_j)$ peut s'écrire comme un produit d'éléments $\Gamma$ de $L(m, \Gamma)$ termes. Ceci montre que
$$L_{n+m}(F, \Gamma) \leqslant L_n(F, \Gamma) L_m(F, \Gamma).$$
Ainsi la suite $(\log L_n(F, \Gamma))_n$ est sous-additive, ce qui conclut.

2. Soit $\Gamma' = \{\gamma'_1, \ldots, \gamma'_r\}$ est un autre système de générateurs. Soient
$$k = \max_{1 \leqslant j \leqslant r} L(\gamma'_j, \Gamma), \quad k' = \max_{1 \leqslant i \leqslant s} L(\gamma_i, \Gamma').$$
Alors pour tout $g \in G$ on a
$$L(g, \Gamma) \leqslant k' L(g, \Gamma') \leqslant kk' L(g, \Gamma).$$
En particulier $L_n(F, \Gamma) \leqslant k' L_n(F, \Gamma') \leqslant kk' L_n(F, \Gamma)$, ce qui conclut.

3. Soit $\Gamma$ un système de générateurs de $G$. Alors on a
$$L_n(I_{\gamma_0} F, \Gamma) - 2c \leqslant L_n(F, \Gamma) \leqslant L_n(I_{\gamma_0} F, \Gamma) + 2c$$
où $c = \max(L(\gamma_0, \Gamma), L(\gamma_0^{-1}, \Gamma))$. Cela conclut.

4. Soit $x'_\star \in X$ un autre point base et $\alpha'$ un chemin joignant $x'_\star$ à $f(x'_\star)$. Soit $G' = \pi_1(M, x'_\star)$. Soit $\beta$ un chemin joignant $x_\star$ à $x'_\star$ Alors l'application $\psi : G \to G'$ définie par $\psi(\gamma) = \beta^{-1}\gamma\beta$ est un isomorphisme de groupes. On a
$$\begin{aligned} F_{x_\star,\alpha}(\gamma) &= \alpha^{-1}(f \circ \gamma)\alpha \\ &= \alpha^{-1}(f \circ \beta)^{-1}(f \circ \beta)(f \circ \gamma)(f \circ \beta)^{-1}(f \circ \beta)\alpha \\ &= \alpha^{-1}(f \circ \beta)^{-1}\alpha'\alpha'^{-1}(f \circ (\beta\gamma\beta^{-1}))\alpha'\alpha'^{-1}(f \circ \beta)\alpha, \end{aligned}$$
ce qui montre que $F_{x_\star,\alpha} = \phi^{-1} F_{x'_\star,\alpha'} \psi$ où $\phi : G \to G'$ est un isomorphisme de la forme $\gamma \mapsto \beta'^{-1}\gamma\beta'$ où $\beta'$ est un chemin joignant $x_\star$ à $x'_\star$. En procédant comme à la question précédente, on conclut.