École Normale Supérieure
2021/2022

Yann Chaubet
chaubet@dma.ens.fr

Systèmes dynamiques
Feuille d'exercices 14

On se propose de démontrer le résultat suivant.

Théorème (Principe variationnel)**.** *Soit* (X, d) *un espace métrique compact et* $f : X \to X$ *un homéomorphisme. Alors*

$$h_{\mathrm{top}}(f) = \sup_\mu h_\mu(f)$$

où le supremum est pris sur les mesures boréliennes de probabilités qui sont invariantes par f*.*

Première inégalité

Soit (X, d) un espace métrique compact et $f : X \to X$ une homéomorphisme. Soit μ une mesure borélienne de probabilité préservée par f.

1. Soit $\mathcal{P} = \{P_1, \dots, P_k\}$ une partition mesurable. Montrer qu'il existe des fermés $C_j \subset P_j,\ j \in \{1, \dots, k\}$ tels que
$$H_\mu(\mathcal{P}|\mathcal{C}) < 1,$$
où on a noté
$$\mathcal{C} = \{C_0, C_1, \dots, C_k\}, \quad C_0 = X \setminus \bigcup_{j=1}^k C_k.$$

2. Soit $\mathcal{R} = \{C_0 \cup C_1, \dots, C_0 \cup C_k\}$. Montrer que
$$\mathrm{card}\left(\bigvee_{j=0}^{n-1} f^{-j}(\mathcal{C})\right) \leq 2^{n+1}\mathrm{card}\left(\bigvee_{j=0}^{n-1} f^{-j}(\mathcal{R})\right), \quad n \in \mathbf{N}.$$

Pour tout recouvrement ouvert fini $\mathcal{U} = \{U_1, \dots, U_\ell\}$ de X, on note

$$\delta(\mathcal{U}, \mathrm{d}) = \sup\Big\{\delta \geq 0,\ \forall x \in X,\ \exists j \in \{1, \dots, \ell\},\ B_{\mathrm{d}}(x, \delta) \subset U_j\Big\}.$$

3. Montrer que $\delta(\mathcal{U}, \mathrm{d}) > 0$ pour tout recouvrement ouvert fini $\mathcal{U}$.

4. Montrer que
$$\delta\left(\bigvee_{j=0}^{n-1} f^{-j}(\mathcal{R}),\ \mathrm{d}_n^f\right) = \delta(\mathcal{R}, \mathrm{d}), \quad n \in \mathbf{N},$$
où $\mathrm{d}_n^f(x, y) = \max_{0 \leq j \leq n-1} \mathrm{d}(f^j(x), f^j(y))$.

5. En déduire que $h_\mu(f) \leq h_{\mathrm{top}}(f) + \log 2 + 1$.

6. Montrer finalement que $h_\mu(f) \leqslant h_{\mathrm{top}}(f)$.

Deuxième inégalité

Soit (X, d) un espace métrique compact et $f : X \to X$ une homéomorphisme. On note $\mathcal{M}$ l'espace des mesures de probabilités boréliennes sur X, et $\mathcal{M}_f$ celles qui sont f-invariantes.

7. Montrer que pour tous $\mu \in \mathcal{M}$, $x \in X$ et $\delta > 0$, il existe $\delta' \in]0, \delta[$ tel que $\mu(\partial B(x, \delta')) = 0$.

Pour toute partition finie $\mathcal{P} = \{P_1, \ldots, P_r\}$ de X, on notera $\partial\mathcal{P} = \cup_{j=1}^{r} \partial P_j$.

8. Montrer que pour tout $\delta > 0$, il existe une partition finie $\mathcal{P} = \{P_1, \ldots, P_r\}$ de X telle que $\operatorname{diam} P_i < \delta$ pour tout i et $\mu(\partial\mathcal{P}) = 0$.

Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $n \geqslant 1$ on se donne $E_n \subset X$ un ensemble (n, ε) séparé, c'est-à-dire

$$\mathrm{d}_n^f(x, y) > \varepsilon, \quad x \neq y \in E_n.$$

On considère les mesures $\nu_n, \mu_n \in \mathcal{M}$ définies par

$$\nu_n = \frac{1}{\operatorname{card}(E_n)} \sum_{x \in E_n} \delta_x, \quad \mu_n = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f_*^i \nu_n.$$

où δ_x désigne le Dirac en x.

9. Montrer qu'il existe $\mu \in \mathcal{M}_f$ et une extraction (n_k) telle que l'on a la convergence faible

$$\mu_{n_k} \to \mu, \quad k \to +\infty,$$

et aussi

$$\limsup_n \frac{\log \operatorname{card}(E_n)}{n} = \lim_k \frac{\log \operatorname{card}(E_{n_k})}{n_k}.$$

Soit $\mathcal{P}$ une partition comme dans la question 8 avec $\delta = \varepsilon$.

10. Montrer que

$$\log \operatorname{card}(E_n) = H_{\nu_n}(\mathcal{P}_f^n).$$

Soit $0 < q < n$. Pour tout $0 \leqslant k < q$ on note $a(k)$ la partie entière de $(n-k)/q$.

11. Montrer que pour tout $0 \leqslant k < q$ on a

$$\mathcal{P}_f^n = \left(\bigvee_{r=0}^{a(k)-1} f^{-(rq+k)}(\mathcal{P}_f^q) \right) \vee \left(\bigvee_{j \notin]k, k+a(k)q[} f^{-j}(\mathcal{P}) \right).$$

12. Montrer que

$$\log \operatorname{card}(E_n) \leqslant \sum_{r=0}^{a(k)-1} H_{f_*^{rq+k}\nu_n}(\mathcal{P}_f^q) + 2q \log \operatorname{card}(\mathcal{P}).$$

13. Montrer que

$$\log \operatorname{card}(E_n) \leqslant \frac{n}{q} H_{\mu_n}(\mathcal{P}_f^q) + 2q \log \operatorname{card}(\mathcal{P}).$$

14. En déduire que

$$\limsup \frac{\log \operatorname{card}(E_n)}{n} \leqslant h_\mu(f).$$

15. Conclure.