École Normale Supérieure
2021/2022

Yann Chaubet
chaubet@dma.ens.fr

Systèmes dynamiques
Feuille d'exercices 11

Exercice 1. *Décroissance surexponentielle des corrélations pour les applications dilatantes du cercle*

Pour tout $m \in \mathbf{N}_{\geq 2}$ on note E_m la multiplication par m sur $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$.

1. Montrer que E_m est fortement mélangeante pour la mesure de Haar μ sur $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$.
2. Soient $\varphi, \psi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}/\mathbf{Z})$.
   (a) Montrer que pour tout $N > 0$, il existe $C > 0$ telle que
   $$\left| \int_{\mathbf{R}/\mathbf{Z}} \psi(\theta) \mathrm{e}^{-2i\pi k\theta} \mathrm{d}\mu(\theta) \right| \leq \frac{C}{|k|^N}, \quad k \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}.$$
   (b) En déduire que pour tout $r > 0$, il existe $C > 0$ telle que
   $$\left| \int_{\mathbf{R}/\mathbf{Z}} \varphi \left(\psi \circ E_m^j\right) \mathrm{d}\mu - \int_{\mathbf{R}/\mathbf{Z}} \varphi \mathrm{d}\mu \int_{\mathbf{R}/\mathbf{Z}} \psi \mathrm{d}\mu \right| \leq C\mathrm{e}^{-rj}, \quad j \in \mathbf{N}.$$

Exercice 2. *Presque tous les nombres réels sont normaux*

On dit qu'un nombre $x \in [0, 1)$ est normal si pour tout $m \geq 2$, son développement en base m
$$x = 0, a_1 a_2 \ldots,$$
(qui est unique si on demande que pour tout k, il existe $k' \geq k$ tel que $a_{k'} \neq m - 1$) satisfait
$$\frac{1}{n} \# \Big\{ k \in \{1, \ldots, n\},\ a_k = j \Big\} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{m}, \quad j = 0, \ldots, m - 1.$$
Montrer que presque tout $x \in [0, 1)$ est normal pour la mesure de Lebesgue.

Exercice 3. *Équidistribution des rotations irrationnelles du cercle*

Soit $\alpha \in \mathbf{T}^d = \mathbf{R}^d/\mathbf{Z}^d$ et $R_\alpha : \mathbf{T}^d \to \mathbf{T}^d$ donnée par $R_\alpha(x) = x + \alpha$. On suppose que la famille $(1, \alpha_1, \ldots, \alpha_d)$ est linéairement indépendante sur $\mathbf{Q}$, où $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$.

1. Montrer que R_α est ergodique pour la mesure de Haar sur $\mathbf{T}^d$. Est-elle mélangeante ?
2. Soit $C \subset \mathbf{T}^d$ un produit d'intervalles. Montrer que pour μ presque tout $x \in \mathbf{T}^d$,
   $$\frac{1}{n} \# \Big\{ k \in \{1, \ldots, n\},\ x + k\alpha \in C \Big\} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \mu(C). \tag{1}$$
3. Montrer que pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{C}(\mathbf{T}^d, \mathbf{C})$, la suite de fonctions $S_n\varphi = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \varphi \circ R_\alpha^k$ converge uniformément vers $\int_{\mathbf{T}^d} \varphi \, \mathrm{d}\mu$.
4. Montrer que la convergence (1) a lieu pour tout $x \in \mathbf{T}^d$.
5. On considère la suite des premiers chiffres des puissances de 2 : $1, 2, 4, 8, 1 \ldots$ Montrer que la fréquence d'apparition du chiffre 7 dans cette suite est à peu près 5.8%.

Exercice 4. *Mélange pour une famille dense de L^2*

Soit (X,μ) un espace de probabilités et $f : X \to X$ une transformation mesurable. On suppose qu'il existe une base $(e_k)_{k\in\mathbf{Z}}$ de $L^2(X,\mu)$ telle que

$$\lim_n \int_X e_k\left(e_\ell \circ f^n\right) \mathrm{d}\mu = \int_X e_k \mathrm{d}\mu \int_X e_\ell \mathrm{d}\mu, \quad k,\ell \in \mathbf{Z}.$$

Montrer que f est fortement mélangeante.

Exercice 5. *Automorphismes ergodiques du tore*

Soit $A \in \mathrm{GL}(d,\mathbf{Z})$ et $f_A : \mathbf{T}^d \to \mathbf{T}^d$ l'automorphisme de $\mathbf{T}^d$ associé. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes.

(i) La transformation f_A est ergodique pour la mesure de Haar.

(ii) La transformation f_A est mélangeante pour la mesure de Haar.

(iii) Aucune valeur propre de A n'est racine de l'unité.

Exercice 6. *Moyenne temporelle des temps de retour*

Soit (X,μ) un espace de probabilités et $f : X \to X$ une transformation ergodique pour μ. Soit $A \subset X$ un ensemble mesurable de mesure non nulle, $\tau : A \to \mathbf{N}_{\geq 1} \cup \{+\infty\}$ le temps de premier retour dans A, et $g : x \mapsto f^{\tau(x)}(x)$ l'application de premier retour associée (définie presque partout sur A).

1. Montrer que $\displaystyle\int_A \tau \mathrm{d}\mu = 1$.
2. En déduire que pour μ presque tout x de A,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \tau\left(g^k(x)\right) = \frac{1}{\mu(A)}.$$

Exercice 7. *Un critère pour le mélange faible*

On dira qu'un ensemble $E \subset \mathbf{N}$ est de densité nulle si

$$\lim_n \frac{1}{n}\#\Big(\{1,\ldots,n\} \cap E\Big) = 0.$$

On dira qu'une suite strictement croissante d'entiers (n_j) est de densité 1 si $\complement\{n_j,\ j \in \mathbf{N}\}$ est de densité nulle.

1. Soit (a_n) une suite de nombre complexes bornés. Montrer que $\displaystyle\lim_n \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} |a_n| = 0$ si et seulement si, il existe un ensemble de densité nulle E tel que $\displaystyle\lim_{\substack{n\to+\infty \\ n\notin E}} a_n = 0$.

Soit f une transformation mesurable d'un espace probabilisé $(X,\mathscr{A},\mu)$. On suppose que $(\mathscr{A},\mu)$ admet une base dénombrable. On dit que f est faiblement mélangeante si pour tous $A,B \in \mathscr{A}$, on a

$$\lim_n \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \big|\mu(f^{-n}(A)\cap B) - \mu(A)\mu(B)\big| = 0.$$

2. Montrer que f est faiblement mélangeante si et seulement si il existe une suite d'entiers (n_j) de densité 1 telle que

$$\lim_j \mu\big(f^{-n_j}(A)\cap B\big) = \mu(A)\mu(B), \quad A,B \in \mathscr{A},$$

ou encore si et seulement si

$$\lim_n \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \Big(\mu(f^{-k}(A)\cap B) - \mu(A)\mu(B)\Big)^2 = 0, \quad A,B \in \mathscr{A}.$$