École Normale Supérieure
2021/2022

Yann Chaubet
chaubet@dma.ens.fr

# Systèmes dynamiques
# Corrigé 10

**Exercice 1.** *Moyennes de Birkhoff pour les permutations*
Soit $\sigma$ une permutation de $X = \{1, \ldots, p\}$. Montrer que pour toute fonction $\varphi : X \to \mathbf{C}$ et tout $x \in X$ on a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi\left(\sigma^k(x)\right) = \frac{1}{|\mathcal{O}(x)|} \sum_{y \in \mathcal{O}(x)} \varphi(y),$$

où $\mathcal{O}(x) = \{\sigma^k(x),\ k \in \mathbf{N}\}$ est l'orbite de $x$.

**Exercice 2.** *Théorème ergodique et isométries*
Soit $(X, \mathrm{d})$ un espace métrique compact, $f : X \to X$ une isométrie (i.e. $\mathrm{d}(f(x), f(y)) = \mathrm{d}(x, y)$ pour tous $x, y \in X$) et $\mu$ une mesure borélienne de probabilités invariante par $f$ telle que $\mu(U) > 0$ pour tout ouvert $U$ non vide. Soit $\varphi : X \to \mathbf{C}$ une fonction continue et

$$S_n\varphi = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi \circ f^k.$$

Montrer que $S_n\varphi$ converge uniformément sur $X$ vers une fonction continue.

**Exercice 3.** *Théorème ergodique sur les espaces métriques compacts*
Soit $(X, \mathrm{d})$ un espace métrique compact et $f : X \to X$ une transformation mesurable préservant une mesure borélienne de probabilités $\mu$. Montrer qu'il existe un ensemble mesurable $G \subset X$ de mesure totale tel que pour tout fonction continue $\varphi$ et tout $x \in G$,

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\varphi \circ f^k\right)(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \bar{\varphi}(x),$$

où $\bar{\varphi}$ est la fonction limite des moyennes de Birkhoff de $\varphi$ donnée par le théorème ergodique.

**Exercice 4.** *Unique ergodicité et densité des orbites*
Soit $(X, \mathrm{d})$ un espace métrique compact et $f : X \to X$ une transformation continue. On suppose qu'il existe une unique mesure borélienne de probabilités invariante $\mu$ et que $\mu(A) > 0$ pour tout ouvert non vide $A$. Montrer que toutes les orbites de $f$ sont denses dans $X$.

**Exercice 5.** *Le théorème de Von Neumann via le théorème de Birkhoff*
Soit $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espace probabilisé, $\varphi \in L^2(\mu)$ et $\bar{\varphi} \in L^1(\mu)$ sa fonction associée dans le théorème de Birkhoff. On note aussi $S_n\varphi = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \varphi \circ f^k$. On cherche à retrouver le théorème de Von Neumann.

1. Montrer que $\bar{\varphi} \in L^2(\mu)$ et que $\|\bar{\varphi}\|_{L^2(\mu)} \le \|\varphi\|_{L^2(\mu)}$.
2. Montrer que $S_n\varphi \to \bar{\varphi}$ dans $L^2(\mu)$.

**Exercice 6.** *Explosion des sommes de Birkhoff et positivité de la moyenne*
Soit $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espace de probabilités et $f : X \to X$ une application mesurable préservant $\mu$. Soit $\varphi \in L^1(\mu)$. On suppose que pour $\mu$ presque tout $x$,

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{j=0}^{n} \varphi\left(f^k(x)\right) = +\infty.$$

On cherche à montrer que $\displaystyle\int_X \varphi \, \mathrm{d}\mu > 0$.

On note $T_n\varphi = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \varphi \circ f^k$ et pour tout $\varepsilon > 0$,

$$A_\varepsilon = \bigcap_{n\geq 1} \Big\{T_n\varphi \geq \varepsilon\Big\}, \quad B_\varepsilon = \bigcup_{k\geq 0} f^{-k}(A_\varepsilon).$$

1. Montrer que $\int_X \varphi \, \mathrm{d}\mu \geq 0$.
2. Soit $x \in A_\varepsilon$. Montrer que pour tout $n \geq 1$,
$$T_n\varphi(x) \geq \varepsilon \sum_{k=0}^{n-1} \chi_{A_\varepsilon}\left(f^k(x)\right).$$
3. Montrer que si $\int_X \varphi \, \mathrm{d}\mu = 0$ alors $\mu(B_\varepsilon) = 0$.
4. Conclure.

**Exercice 7.** *Applications uniformément quasi-périodiques sur* $\mathbf{N}$
Une application $\varphi : \mathbf{Z} \to \mathbf{R}$ sera dite *uniformément quasi-périodique* si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $L(\varepsilon) \in \mathbf{N}$ tel que

$$\forall n \in \mathbf{Z},\ \exists \tau \in \{n+1, \dots, n+L(\varepsilon)\},\ \forall k \in \mathbf{Z}, \quad |\varphi(k+\tau) - \varphi(k)| < \varepsilon.$$

1. Montrer que si $\varphi$ est uniformément quasi-périodique, elle est bornée.
2. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\rho \geq 1$ tel que
$$\frac{1}{\rho}\left|\sum_{j=n\rho}^{n(\rho+1)} \varphi(j) - \sum_{j=1}^{\rho} \varphi(j)\right| < 2\varepsilon, \quad n \geq 1.$$
3. Montrer que $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\varphi(j)$ converge quand $n \to +\infty$.
4. Montrer plus généralement que la limite
$$\lim_n \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \varphi(x+j)$$
existe pour tout $x \in \mathbf{Z}$ et est indépendante de $x$.