École Normale Supérieure
2019/2020

Pour toute question :
`chaubet@dma.ens.fr`

Systèmes dynamiques
Corrigé DM n°3

Basé sur la copie de Manh-Linh Nguyen

Échauffement

1. (a) Si $f(q) \geq \frac{1}{2}$, le résultat est évident. On suppose donc que $f(q) < \frac{1}{2}$. Pour $x \in [0,1]$, s'il existe $p \in \mathbf{N}_{\geq 1}$ tel que

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{f(p)}{q} \tag{1}$$

alors $|qx - p| < f(q)$, d'où $p < qx + f(q) < q + \frac{1}{2}$, i.e. $p \leq q$. Ainsi

$$A_q = \bigcup_{p=1}^{q} A_{q,p}, \qquad A_{q,p} := [0,1] \cap \left(\tfrac{f(q)-p}{q}, \tfrac{f(q)+p}{q} \right).$$

Pour$p = 1, \ldots, q$, $\ell(A_{q,p}) \leq \ell\left(\left(\frac{f(q)-p}{q}, \frac{f(q)+p}{q} \right) \right) = \frac{2f(q)}{q}$. Donc

$$\ell(A_q) \leq \sum_{p=1}^{q} \ell(A_{q,p}) \leq \sum_{p=1}^{q} = \sum_{p=1}^{q} \frac{2f(q)}{q} = 2f(q). \tag{2}$$

(b) Pour $x \in [0,1]$, (1) est vrai pour une infinité de couples (p,q) ssi pour tout $n \geq 1$, il existe (p,q) avec $q \geq 1$ vérifiant (1), i.e. $x \in A_q$. Il s'agit d'étudier la mesure de Lebesgue de l'ensemble $\bigcap_{n\geq 1} \bigcup_{q \geq n} A_q$. Sous l'hypothèse du second point du **Théorème**, la séries $\sum_{n\geq 1} \ell(A_q)$ converge. Par le lemme de Borel-Cantelli

$$\ell\left(\bigcap_{n\geq 1} \bigcup_{q\geq n} A_q \right) = 0,$$

i.e. pour presque tout $x \in [0,1]$, (1) n'est vraie pour qu'un nombre fini de couples (p,q).

Développement en fractions continues

2. Pour $m = 1$, on a

$$[a_1(x); T^1(x)] = \frac{1}{a(x) + T(x)} = \frac{1}{\lfloor 1/x \rfloor + \{1/x\}} = \frac{1}{1/x} = x.$$

Pour $m \geq 2$, on a

$$a_m(x) + T^m(x) = a(T^{m-1}(x)) + T^m(x) = \left\lfloor \tfrac{1}{T^{m-1}(x)} \right\rfloor + \left\{ \tfrac{1}{T^{m-1}(x)} \right\} = \frac{1}{T^{m-1}(x)}.$$

Ainsi

$$
\begin{aligned}
[a_1(x), \ldots, a_m(x); T^m(x)] &= \cfrac{1}{a_1(x) + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_{m-1}(x) + \cfrac{1}{a_m(x) + T^m(x)}}}} \\
&= \cfrac{1}{a_1(x) + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_{m-1}(x) + T^{m-1}(x)}}} \\
&= [a_1(x), \ldots, a_{m-1}(x); T^{m-1}(x)],
\end{aligned}
$$

d'où le résultat.

3. Le sens « si » est clair. On démontre le sens « seulement si ». Pour $x \in I$ rationnel, on écrit $x = \frac{a}{b}$ avec $(a, b) \in \mathbf{N}^2_{\geq 1}$, $\gcd(a, b) = 1$ et $a < b$ (les cas où $x = 0$ ou $x = 1$ sont faciles). Écrivons $b = qa+c$ $(0 \leq c < a)$, alors

$$
T(x) = \left\{ \frac{1}{x} \right\} = \left\{ \frac{qa + c}{a} \right\} = \frac{c}{a}.
$$

On voit que $T(x) \in \mathbf{Q}$ et que le dénominateur de $T(x)$ (sous forme réduite) est strictement plus petit que celui de x. Ainsi, il existe $n \geq 1$ tel que $T^n(x)$ a dénominateur 1, i.e. $T^n(x) \in \{0, 1\}$. Donc $T^{n+1}(x) = 0$.

4. (a) Quand $n = 0$, c'est clair. Pour $n \geq 1$

$$
\begin{aligned}
& p_{n-1}(x)q_n(x) - p_n(x)q_{n-1}(x) \\
&= p_{n-1}(x)(a_n(x)q_{n-1}(x) + q_{n-2}(x)) - (a_n(x)p_{n-1}(x) + p_{n-2}(x))q_{n-1}(x) \\
&= -(p_{n-2}(x)q_{n-1}(x) - p_{n-1}(x)q_{n-1}(x)),
\end{aligned}
$$

d'où le résultat suit (récurrence sur n).

(b) Quand $n = 1$, on a

$$
\frac{p_1(x) + tp_0(x)}{q_1(x) + tq_0(x)} = \frac{1}{a_1(x) + t} = [a_1(x); t].
$$

Quand $n = 2$, on a

$$
\begin{aligned}
\frac{p_2(x) + tp_1(x)}{q_2(x) + tq_1(x)} &= \frac{a_2(x) + t}{a_1(x)a_2(x) + 1 + a_1(x)t} \\
&= \cfrac{1}{a_1(x) + \cfrac{1}{a_2(x) + t}} \\
&= [a_1(x), a_2(x); t].
\end{aligned}
$$

On considère $n \geq 3$. Si $a_n(x) = 1$ et $t = 0$, par récurrence

$$\begin{aligned}
[a_1(x), \ldots, a_{n-1}(x), 1; 0] &= \cfrac{1}{a_1(x) + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_{n-2}(x) + \cfrac{1}{a_{n-1}(x) + 1}}}} \\
&= \left[a_1(x), \ldots, a_{n-2}(x); \tfrac{1}{a_{n-1}(x)+1}\right] \\
&= \frac{p_{n-2}(x) + \frac{p_{n-3}(x)}{a_{n-1}(x)+1}}{q_{n-2}(x) + \frac{q_{n-3}(x)}{a_{n-1}(x)+1}} \\
&= \frac{a_{n-1}(x)p_{n-2}(x) + p_{n-3}(x) + p_{n-2}(x)}{a_{n-1}(x)q_{n-2}(x) + q_{n-3}(x) + q_{n-2}(x)} \\
&= \frac{p_{n-1}(x) + p_{n-2}(x)}{q_{n-1}(x) + q_{n-2}(x)} \\
&= \frac{p_n(x)}{q_n(x)} \qquad (a_n(x) = 1).
\end{aligned}$$

Si $a_n(x) > 1$ ou $t > 0$, alors $\frac{1}{a_n(x)+t} < 1$. Par récurrence

$$\begin{aligned}
[a_1(x), \ldots, a_n(x); t] &= \cfrac{1}{a_1(x) + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_{n-1}(x) + \cfrac{1}{a_n(x) + t}}}} \\
&= \left[a_1(x), \ldots, a_{n-1}(x); \tfrac{1}{a_n(x)+t}\right] \\
&= \frac{p_{n-1}(x) + \frac{p_{n-2}(x)}{a_n(x)+t}}{q_{n-1}(x) + \frac{q_{n-2}(x)}{a_n(x)+t}} \\
&= \frac{a_n(x)p_{n-1}(x) + p_{n-2}(x) + tp_{n-1}(x)}{a_n(x)q_{n-1}(x) + q_{n-2}(x) + tq_{n-1}(x)} \\
&= \frac{p_n(x) + tp_{n-1}(x)}{q_n(x) + tq_{n-1}(x)}.
\end{aligned}$$

D'où le résultat.

(c) De **1.** et (4b), on a

$$\begin{aligned}
\left|x - \frac{p_n(x)}{q_n(x)}\right| &= \left|\frac{p_n(x) + T^n(x)p_{n-1}(x)}{q_n(x) + T^n(x)q_{n-1}(x)} - \frac{p_n(x)}{q_n(x)}\right| \\
&= \frac{T^n(x)\,|p_{n-1}(x)q_n(x) - p_n(x)q_{n-1}(x)|}{q_n(x)(q_n(x) + T^n(x)q_{n-1}(x))} \\
&= \frac{1}{q_n(x)\left(\frac{q_n(x)}{T^n(x)} + q_{n-1}(x)\right)} \qquad (4a).
\end{aligned}$$

Il suffit de montrer que

$$q_n(x) + q_{n+1}(x) \geq \frac{q_n(x)}{T^n(x)} + q_{n-1}(x) \geq q_{n+1}(x).$$

En effet, comme $a_{n+1}(x) = \left\lfloor \frac{1}{T_n(x)} \right\rfloor$, on a

$$a_{n+1}(x) \leq \frac{1}{T_n(x)} < a_{n+1}(x) + 1.$$

Il suit que

$$a_{n+1}(x)q_n(x) + q_{n-1} \leq \frac{q_n(x)}{T_n(x)} + q_{n-1}(x) < a_{n+1}(x)q_n(x) + q_n(x) + q_{n-1}(x),$$

i.e.

$$q_{n+1}(x) \leq \frac{q_n(x)}{T_n(x)} + q_{n-1}(x) < q_{n+1}(x) + q_n(x),$$

ce que nous voulions.

5. Les suites $(p_n(x))_{n\geq 1}$ et $(q_n(x))_{n\geq 1}$ sont croissantes et positives. Pour $n \geq 3$, on a

$$p_n(x) = a_n(x)p_{n-1}(x) + p_{n-2}(x) \geq p_{n-1}(x) + p_{n-2}(x) \geq 2\sqrt{p_{n-1}(x)p_{n-2}(x)}.$$

Il suit que

$$p_n(x) \cdots p_3(x) \geq 2\sqrt{p_{n-1}(x)p_{n-2}(x)} \cdots \sqrt{p_2(x)p_1(x)},$$

i.e. $p_n(x)\sqrt{p_{n-1}(x)} \geq 2^{n-2}p_2(x)\sqrt{p_1(x)} \geq 2^{n-2}$. Donc $p_n(x)^2 \geq 2^{n-2}$ et on trouve que $p_n(x) \geq 2^{\frac{n-2}{2}}$. De même, $q_n(x) \geq 2^{\frac{n-2}{2}}$, donc

$$p_n(x)q_n(x) \geq 2^{n-2}. \tag{3}$$

On considère deux cas.

(a) n est pair. De **2.**, (4a) et (4b), on a

$$\begin{aligned}
\frac{x}{p_n(x)/q_n(x)} &= \frac{q_n(x)(p_n(x) + T^n(x)p_{n-1}(x))}{p_n(x)(q_n(x) + T^n(x)q_{n-1}(x))} \\
&= 1 + \frac{T^n(x)(p_{n-1}(x)q_n(x) - p_n(x)q_{n-1}(x))}{p_n(x)(q_n(x) + T^n(x)q_{n-1}(x))} \\
&= 1 + \frac{T^n(x)}{p_n(x)(q_n(x) + T^n(x)q_{n-1}(x))} \\
&= 1 + \frac{1}{p_n(x)\left(\frac{q_n(x)}{T^n(x)} + q_{n-1}(x)\right)} > 1.
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\left|\log \frac{x}{p_n(x)/q_n(x)}\right| &= \log\left(1 + \frac{1}{p_n(x)\left(\frac{q_n(x)}{T^n(x)} + q_{n-1}(x)\right)}\right) \\
&\leq \frac{1}{p_n(x)\left(\frac{q_n(x)}{T^n(x)} + q_{n-1}(x)\right)} \\
&\leq \frac{1}{p_n(x)q_n(x)} && (T^n(x) \leq 1) \\
&\leq \frac{1}{2^{n-2}} && \text{(d'après (3))}.
\end{aligned}$$

(b) n est impair. Dans ce cas

$$\begin{aligned}\frac{p_n(x)/q_n(x)}{x} &= \frac{p_n(x)(q_n(x)+T^n(x)q_{n-1}(x))}{q_n(x)(p_n(x)+T^n(x)p_{n-1}(x))}\\ &= 1+\frac{T^n(x)(p_n(x)q_{n-1}(x)-p_{n-1}(x)q_n(x))}{q_n(x)(p_n(x)+T^n(x)p_{n-1}(x))}\\ &= 1+\frac{T^n(x)}{q_n(x)(p_n(x)+T^n(x)p_{n-1}(x))}\\ &= 1+\frac{1}{q_n(x)\left(\frac{p_n(x)}{T^n(x)}+p_{n-1}(x)\right)} > 1,\end{aligned}$$

et l'argument est similaire.

La mesure de Gauss

6. On écrit $(0,1]=\bigsqcup_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}\right]$. Pour $n\in\mathbf{N}_{\geq 1}$ et $x\in\left(\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}\right]$, on a $n\leq\frac{1}{x}<n+1$, d'où

$$T(x)=\left\{\frac{1}{x}\right\}=\frac{1}{x}-\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor=\frac{1}{x}-n.$$

Ainsi, pour toute fonction continue $f: I\to\mathbf{R}_{\geq 0}$, on a

$$\begin{aligned}&\int_I f d(T_*\mu)\\ &= \int_I f\circ T\,d\mu\\ &= \frac{1}{\log 2}\int_0^1\frac{f(T(x))\,dx}{1+x}\\ &= \frac{1}{\log 2}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}}\frac{f\left(\frac{1}{x}-n\right)dx}{1+x} && \text{(convergence monotone)}\\ &= \frac{1}{\log 2}\sum_{n=1}^{\infty}\int_1^0\frac{f(y)}{1+\frac{1}{y+n}}\cdot\left(-\frac{dy}{(y+n)^2}\right) && \left(y=\frac{1}{x}-n\right)\\ &= \frac{1}{\log 2}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1\frac{f(y)dy}{(y+n)(y+n+1)}\\ &= \frac{1}{\log 2}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1\left(\frac{1}{y+n}-\frac{1}{y+n+1}\right)f(y)dy\\ &= \frac{1}{\log 2}\int_0^1\frac{f(y)dy}{y+1} && \text{(convergence monotone)}\\ &= \int_I f\,d\mu.\end{aligned}$$

Donc $T_*\mu=\mu$.

7. (a) Soit $t\in[0,1)$ et $x=\psi_{a_1,\ldots,a_m}(t)=[a_1,\ldots,a_m;t]$. On va montrer que $a_j(x)=a_j$ pour tout $j=1,\ldots,m$ par récurrence sur m (d'où on a $x\in I_{a_1,\ldots,a_m}$). Quand $m=1$, on a $x=\frac{1}{a_1+t}$, donc $\frac{1}{a_1+1}<x\leq\frac{1}{a_1}$, d'où $a_1\leq\frac{1}{x}<a_1+1$. Mais alors $a_1(x)=a(x)=\left[\frac{1}{x}\right]=a_1$.
On considère $m\geq 2$. De **2.**, on sait que

$$x=[a_1(x),a_2(x),\ldots,a_m(x);T^m(x)]=\frac{1}{a_1(x)+[a_2(x),\ldots,a_m(x);t]}.$$

Il suit que

$$a_1 + [a_2, \ldots, a_m; t] = \frac{1}{x} = a_1(x) + [a_2(x), \ldots, a_m(x); T^m(x)]. \tag{4}$$

Si $m = 2$ et $t = 0$, alors $x = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2}} = [a_1; \frac{1}{a_2}]$. Il suit du cas où $m = 1$ que $a_1(x) = a_1$. Si $m \geq 3$ où $t > 0$, on aura

$$a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_m + t}}} > 1,$$

donc $0 \leq [a_2, \ldots, a_m; t] < 1$. En particulier $x \notin \mathbf{Z}$. De (4), $[a_2(x), \ldots, a_m(x); T^m(x)] \notin \mathbf{Z}$, donc $[a_2(x), \ldots, a_m(x); T^m(x)] < 1$. Il suit que $a_1 = a_1(x)$. Dans tous cas, on a $a_1(x) = a_1$ et puis $[a_2, \ldots, a_m; t] = [a_2(x), \ldots, a_m(x); T^m(x)]$. Par l'hypothèse de récurrence, $a_j(x) = a_j$ pour tout $2 \leq j \leq m$.

Reciproquement, pour tout $x \in I_{a_1, ldots, a_m}$, on a $a_j(x) = a_j$ pour $1 \leq j \leq m$. De **2.**

$$x = [a_1, \ldots, a_m; T^m(x)] = \psi_{a_1, \ldots, a_m}(T^m(x)).$$

(b) Soit $x = \psi_{a_1, \ldots, a_m}(t)$. Il suit du partie précédent que $x \in I_{a_1, \ldots, a_m}$, i.e. $a_j(x) = a_j$ pour $j = 1, \ldots, m$. Par récurrence, on a $p_j(x) = p_j$ et $q_j(x) = q_j$ pour tout $j = 1, \ldots, m$. En outre, de (4b), on a

$$\psi_{a_1, \ldots, a_m}(t) = [a_1(x), \ldots, a_m(x); t] = \frac{p_m(x) + tp_{m-1}(x)}{q_m(x) + tq_{m-1}(x)} = \frac{p_m + tp_{m-1}}{q_m + tq_{m-1}}.$$

(c) Il suit de (7b) que la fonction $\psi_{a_1, \ldots, a_m}$ est continue est monotone. En particulier $I_{a_1, \ldots, a_m} = \psi_{a_1, \ldots, a_m}([0, 1))$ est un intervalle dont les extrémités sont $\frac{p_m + p_{m-1}}{q_m + q_{m_1}}$ et $\frac{p_m}{q_m}$. Ainsi

$$\ell(I_{a_1, \ldots, a_m}) = \left| \frac{p_m + p_{m-1}}{q_m + q_{m-1}} - \frac{p_m}{q_m} \right| = \frac{|p_{m-1}q_m - p_m q_{m-1}|}{q_m(q_m + q_{m-1})} = \frac{1}{q_m(q_m + q_{m-1})}$$

(en effet, pour n'importe quel $x \in I_{a_1, \ldots, a_m}$, on a $p_{m-1}q_m - p_m q_{m-1} = p_{m-1}(x)q_m(x) - p_m(x)q_{m-1}(x) = (-1)^m$ par (4b)).

(d) On a vu dans (7c) que les $I_{a_1, \ldots, a_m}$ sont des intervalles, donc un sens est trivial. Pour le sens reciproque, il faut montrer que les boréliens sont dans la tribu $\mathcal{F}$ engendrée par les intervalles de cette forme (et I). On divise la preuve en plusieurs étapes.

(i) On a

$$\forall n \in \mathbf{N}_{n \geq 1}, \qquad I_n = \psi_n([0, 1)) = \left\{ \tfrac{1}{n+t} | t \in [0, 1) \right\} = \left(\tfrac{1}{n+1}, \tfrac{1}{n} \right].$$

Ainsi les intervalles $\left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} \right]$ sont $\mathcal{F}$-mesurables. De plus, pour tout $n \in \mathbf{N}_{n \geq 1}$

$$(0, \tfrac{1}{n}] = \bigcup_{k \geq n} \left(\tfrac{1}{k+1}, \tfrac{1}{k} \right] \in \mathcal{F}.$$

(ii) Pour tous $n, k \in \mathbf{N}_{n \geq 1}$, on a

$$I_{n,k} = \left\{ \tfrac{1}{n + \frac{1}{k+t}} | t \in [0, 1) \right\} = \left[\tfrac{k}{nk+1}, \tfrac{k+1}{n(k+1)+1} \right).$$

Donc, puor tout $n \in \mathbf{N}_{n \geq 1}$

$$\mathcal{F} \ni \bigcup_{k \geq 1} \left[\tfrac{k}{nk+1}, \tfrac{k+1}{n(k+1)+1} \right) = \left[\tfrac{1}{n+1}, \tfrac{1}{n} \right).$$

Ainsi

$$(0, \tfrac{1}{n}) = \bigcup_{k \geq n} \left[\tfrac{1}{k+1}, \tfrac{1}{k} \right) \in \mathcal{F}.$$

En particulier, le singletons $\left\{ \frac{1}{n} \right\}$, $n \in \mathbf{N}_{\geq 1}$ sont $\mathcal{F}$-mesurables.

(iii) *Pour tout $k \in \mathbf{N}_{\geq 1}$, la fonction ψ_k est $\mathcal{F}$-mesurable.* En effet ψ_k est évidemment injective d'image I_k. De plus, $\psi_k([0,1)) \cap \psi_{k'}([0,1)) = \varnothing$ si $k \neq k'$.
On considère un intervalle $I_{a_1,\ldots,a_m}$. Par récurrence triviale, on a $\psi_{a_1,\ldots,a_m} = \psi_{a_1} \circ \cdots \circ \psi_{a_m}$. En particulier
$$I_{a_1,\ldots,a_m} = \psi_{a_1,\ldots,a_m}([0,1)) \subseteq \psi_{a_1}([0,1)) = I_{a_1}.$$
Il suit que $\psi_k^{-1}(I_{a_1,\ldots,a_m}) = \varnothing$ quand $a_1 \neq k$. Si $a_1 = k$, on aura
$$\psi_k^{-1}(I_{a_1,\ldots,a_m}) = \psi_k^{-1}(\psi_{a_1} \circ \cdots \circ \psi_{a_m})([0,1)) = \begin{cases} I_{a_2,\ldots,a_m} & \text{si } m \geq 2 \\ [0,1) & \text{si } m = 1. \end{cases}$$
Dans tous cas, $\psi_k^{-1}(I_{a_1,\ldots,a_m}) \in \mathcal{F}$ ($[0,1) \in \mathcal{F}$) car $\{1\} \in \mathcal{F}$). La collection $\{A \in \mathcal{F} | \psi_k^{-1}(A) \in \mathcal{F}\}$ est une tribu contenant les intervalles $I_{a_1,\ldots,a_m}$, donc égal à $\mathcal{F}$.

(iv) Les intervalles $\left(0, \frac{k}{n}\right]$ et $\left(0, \frac{k}{n}\right)$ (où $1 \leq k \leq n$) sont $\mathcal{F}$-mesurables. On le démontre par récurrence sur n. Quand $n = k$ (en pariculier quand $n = 1$), c'est traité. Pour $n \geq 2$ et $k < n$, écrivons
$$n = km + r, \qquad m \geq 1, \qquad 0 \leq r < k.$$
Si $r = 0$, alors $\left(0, \frac{k}{n}\right] = \left(0, \frac{1}{m}\right] \in \mathcal{F}$ (cas (i)) et $\left(0, \frac{k}{n}\right) = \left(0, \frac{1}{m}\right) \in \mathcal{F}$ (cas (ii)). On suppose alors que $r > 0$. Sans peine, on voit que
$$\left(0, \tfrac{k}{n}\right] = \psi_m^{-1}\left(\left[\tfrac{r}{k}, 1\right]\right) \in \mathcal{F}, \qquad \left(0, \tfrac{k}{n}\right) = \psi_m^{-1}\left(\left(\tfrac{r}{k}, 1\right]\right) \in \mathcal{F}$$
car $(0,1] \in \mathcal{F}$ et $\left(0, \frac{r}{k}\right), \left(0, \frac{r}{k}\right] \in \mathcal{F}$ par l'hypothèse de récurrence.

(v) Il suit du cas précédent que tous les intervalles $(u,v] = (0,v] \setminus (0,u]$ avec $u, v \in \mathbf{Q}$ sont $\mathcal{F}$-mesurables. Ils engendrent la tribu borélienne sur I, donc $\mathcal{F}$ coïncide avec cette tribu.

8. C'est vrai pour n'importe quel borélien J.
Observons tout d'abord que pour tous $x \in [0,1)$ et $k \in \mathbf{N}_{\ell \geq 1}$
$$T(\psi_k(x)) = T\left(\frac{1}{x+k}\right) = \{x + k\} = x.$$
Il suit que $T^m \circ \psi_{a_1,\ldots,a_m} = \mathrm{id}_{[0,1)}$. Or, par l'injectivité de $\psi_{a_1,\ldots,a_m}$
$$\begin{aligned} \ell(T^{-m}(J) \cap I_{a_1,\ldots,a_m}) &= \int_{I_{a_1,\ldots,a_m}} \mathbb{1}_{T^{-m}(J)}\, d\ell \\ &= \int_I (\mathbb{1}_{T^{-m}(J)} \circ \psi_{a_1,\ldots,a_m})\, d(\psi_{a_1,\ldots,a_m})_* \ell \\ &= \int_I \mathbb{1}_J \left|\psi'_{a_1,\ldots,a_m}\right| d\ell \\ &= \int_0^1 \mathbb{1}_J(x) \frac{|p_{m-1}q_m - p_m q_{m-1}|}{(q_m + x q_{m-1})^2}\, dx \\ &= \int_0^1 \mathbb{1}_J(x) \frac{dx}{(q_m + x q_{m-1})^2}. \end{aligned}$$
Pour tout $x \in I$, on a $(q_m + xq_{m-1})^2 \leq (q_m + q_{m-1})^2 \leq 2q_m(q_m + q_{m-1})$ (car $(q_m)_{m \geq 1}$ est croissante). De même
$$(q_m + xq_{m-1})^2 \geq q_m^2 \geq q_m \cdot \frac{q_m + q_{m-1}}{2}.$$
Ainsi, par (7b)
$$\int_0^1 \frac{\mathbb{1}_J(x)dx}{(q_m + xq_{m-1})^2} \geq \frac{1}{2q_m(q_m + q_{m-1})} \int_0^1 \mathbb{1}_J(x)\, dx = \frac{1}{2} \ell(I_{a_1,\ldots,a_m}) \ell(J)$$

et
$$\int_0^1 \frac{\mathbb{1}_J(x)dx}{(q_m + xq_{m-1})^2} \leq \frac{2}{q_m(q_m+q_{m-1})} \int_0^1 \mathbb{1}_J(x)\, dx = 2\ell(I_{a_1,\dots,a_m})\ell(J).$$
On conclut que
$$\frac{1}{2}\ell(I_{a_1,\dots,a_m}) \leq \frac{\ell(T^{-m}(J)\cap I_{a_1,\dots,a_m})}{\ell(J)} \leq 2\ell(I_{a_1,\dots,a_m}).$$

9. Soit $J \subseteq I$ un borélien tel que $T^{-1}(J) = J$. En particulier, pour tout intervalle $I_{a_1,\dots,a_m}$, on a (de **8.**)
$$\ell(J)\ell(I_{a_1,\dots,a_m}) \leq 2\ell(J\cap I_{a_1,\dots,a_m}).$$
On va montrer que soit $\ell(J) = 0$ soit $\ell(J^c) = 0$ (d'où soit $\mu(J) = 0$ soit $\mu(J) = 1$ car $\mu \ll \ell$). Fixons $\varepsilon > 0$. Par la construction de ℓ comme mesure extérieure, il existe un borélien $J' \supseteq J^c$, qui est une réunion disjointe d'intervalles de la forme $I_{a_1,\dots,a_m}$, tel que $0 \leq \ell(J'\setminus J^c) < \varepsilon$. Ainsi, $\ell(J)\ell(J^c) \leq \ell(J)\ell(J') \leq 2\ell(J\cap J') = 2\ell(J'\setminus J^c) < 2\varepsilon$. C'est vrai pour tout ε, donc $\ell(J)\ell(J^c) = 0$, d'où le résultat.

Applications aux approximations diophantiennes

10. Montrons par récurrence sur $m = 1,\dots,n$ que
$$\prod_{k=1}^m [a_k(x),\dots,a_n(x)] = \cfrac{1}{q_{m-2}(x) + \cfrac{q_{m-1}(x)}{[a_m(x),\dots,a_n(x)]}}.$$
Quand $m = 1$, les deux côtés sont égales car $q_{-1}(x) = 0$ et $q_0(x) = 1$. Soit $m \geq 2$. Par l'hypothèse de récurrence, on a
$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^m [a_k(x),\dots,a_n(x)] &= \cfrac{[a_m(x),\dots,a_n(x)]}{q_{m-3}(x) + \cfrac{q_{m-2}(x)}{[a_{m-1}(x),\dots,a_n(x)]}} \\ &= \frac{[a_m(x),\dots,a_n(x)]}{q_{m-3}(x) + (a_{m-1}(x) + [a_m(x),\dots,a_n(x)])q_{m-2}(x)} \\ &= \frac{[a_m(x),\dots,a_n(x)]}{q_{m-1}(x) + [a_m(x),\dots,a_n(x)]q_{m-2}(x)} \\ &= \cfrac{1}{q_{m-2}(x) + \cfrac{q_{m-1}(x)}{[a_m(x),\dots,a_n(x)]}}.\end{aligned}$$
D'où l'affirmation. En particulier, quand $n = 1$
$$\prod_{k=1}^n [a_k(x),\dots,a_n(x)] = \frac{1}{q_{n-2}(x) + a_n(x)q_{n-1}(x)} = \frac{1}{q_n(x)}.$$

11. Pour tous $k > k' \in \mathbf{N}_{\geq 1}$, on a
$$a_k = a\circ T^{k-1} = (a\circ T^{k-k'-1})\circ T^{k'} = a_{k-k'}\circ T^{\ell}.$$
Donc, de (4b), on a
$$[a_k(x),\dots,a_n(x)] = [a_1(T^{k-1}(x)),\dots,a_{n-k+1}(T^{k-1}(x))] = \frac{p_{n-k+1}(T^{k-1}(x))}{q_{n-k+1}(T^{k-1}(x))}.$$

En outre, il suit de (4c) que

$$|\log T^{k-1}(x) - [a_k(x), \ldots, a_n(x)]| \leq \frac{1}{2^{n-k+1}}.$$

En sommant par rapport à $k = 1, \ldots, n$, on obtient

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \log T^{k-1}(x) - \log \prod_{k=1}^{n} [a_k(x), \ldots, a_n(x)]\right| \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{n-k+1}}$$

i.e. (par **10.**)

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \log T^{k-1}(x) - \log \frac{1}{q_n(x)}\right| \leq 1 - \frac{1}{2^n} < 1.$$

Il suit que

$$\left|\frac{1}{n} \log \frac{1}{q_n(x)} - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \log T^{k-1}(x)\right| = O\left(\frac{1}{n}\right), \qquad n \to \infty.$$

12. Puisque μ est ergodique pour T, il suit du théorème ergodique de Birkhoff et **11.** que pour presque tout $x \in I \setminus \mathbf{Q}$ ($\mu(\mathbf{Q}) = 0$),

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \frac{1}{q_n(x)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \log T^{k-1}(x) = \int_I \log d\mu = \frac{1}{\log 2} \int_0^1 \frac{\log x \, dx}{1+x}.$$

Pour tout $x \in (0,1)$, on a

$$\frac{\log x}{1+x} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k \log x.$$

On a, pour tout $k \in \mathbf{N}$

$$\int_0^1 x^k \log x \, dx = \left.\frac{x^{k+1} \log x}{k+1}\right|_0^1 - \int_0^1 \frac{x^{k+1}}{k+1} \cdot \frac{dx}{x} = -\int_0^1 \frac{x^k \, dx}{k+1} = -\frac{1}{(k+1)^2}.$$

De plus

$$\sum_{k=0}^{\infty} \int_0^1 |x^k \log x| \, dx = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^1 (-x^k \log x) \, dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^2} < \infty.$$

Par convergence dominée, on a

$$\begin{aligned}
\frac{\log x}{1+x} &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \left(-\frac{1}{(k+1)^2}\right) \\
&= -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \\
&= -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} + 2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^2} \\
&= -\frac{\pi^2}{6} + 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{\pi^2}{6} \\
&= -\frac{\pi^2}{12}.
\end{aligned}$$

Donc $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \frac{1}{q_n(x)} = -\frac{\pi^2}{12 \log 2}$ pour presque tout $x \in I \setminus \mathbf{Q}$. Finalement, pourt tel x, il suit de (4c) que

$$\frac{1}{2q_n(x)q_{n+1}(x)} \leq \left|x - \frac{p_n(x)}{q_n(x)}\right| \leq \frac{1}{q_n(x)q_{n+1}(x)}.$$

Ainsi

$$\frac{1}{n}\left(\log\frac{1}{q_n(x)}+\log\frac{1}{q_{n+1}(x)}-\log 2\right)\le\frac{1}{n}\log\left|x-\frac{p_n(x)}{q_n(x)}\right|$$
$$\le\frac{1}{n}\left(\log\frac{1}{q_n(x)}+\log\frac{1}{q_{n+1}(x)}\right).$$

Il suit que $\frac{1}{n}\log\left|x-\frac{p_n(x)}{q_n(x)}\right|\to-\frac{\pi^2}{6\log 2}$ quand $n\to\infty$.

13. (a) Pour tous $x\in I$ et $n,k\in\mathbf{N}_{\ge1}$, On a équivalence

$$a_n(x)=k\Leftrightarrow a(T^{n-1}(x))=k\Leftrightarrow k\le\tfrac{1}{T^{n-1}(x)}<k+1\Leftrightarrow T^{n-1}(x)\in\left(\tfrac{1}{k+1},\tfrac{1}{k}\right].$$

Donc

$$\begin{aligned}\mu\{x\in I:a_n(x)=k\}&=\mu\left(T^{n-1}\left(\left(\tfrac{1}{k+1},\tfrac{1}{k}\right]\right)\right)\\&=\mu\left(\left(\tfrac{1}{k+1},\tfrac{1}{k}\right]\right)&&(T\text{ est }\mu\text{-invariant})\\&=\int_{\frac{1}{k+1}}^{\frac{1}{k}}\frac{dx}{1+x}\\&=\log(1+x)\Big|_{1/(k+1)}^{1/k}\\&=\log\left(1+\tfrac{1}{k}\right)-\log\left(1+\tfrac{1}{k+1}\right).\end{aligned}$$

Il suit que

$$\mu\{x\in I:a_n(x)\ge k\}=\sum_{\ell=k}^{\infty}\left(\log\left(1+\tfrac{1}{\ell}\right)-\log\left(1+\tfrac{1}{\ell+1}\right)\right)=\log\left(1+\tfrac{1}{k}\right)\le\tfrac{1}{k}.$$

Pour une suite $\mathbf{a}=(a_n)_{n\ge1}$ de réels strictement positifs, on note

$$E_n(\mathbf{a}):=\{x\in I:a_n(x)>a_n\}=\{x\in I:a_n(x)\ge\lfloor a_n\rfloor+1\}$$

Alors

$$A(\mathbf{a})^c=\bigcap_{n\ge1}\bigcup_{m\ge n}E_m(\mathbf{a}).$$

On a

$$\sum_{n\ge1}\mu(E_n(\mathbf{a}))=\sum_{n\ge1}\frac{1}{\lfloor a_n\rfloor+1}<\sum_{n\ge1}\frac{1}{a_n}<\infty$$

Donc $\mu(A(\mathbf{a})^c)=0$ (par le lemme de Borel-Cantelli), i.e. $\mu(A(\mathbf{a}))=1$.

(b) On a

$$A(\mathbf{a})=\bigcup_{n\ge1}\bigcap_{m\ge n}E_m(\mathbf{a})^c.$$

Il faut donc démontrer que pour tout $n\ge1$

$$\mu\left(\bigcap_{m\ge n}E_m(\mathbf{a})^c\right)=0.$$

Commençons par le cas où $n = 1$. Comme $\mu \ll \ell$, il suffira de démontrer que $\ell\left(\bigcap_{m\geq 1} E_m(\mathbf{a})^c\right) = 0$. Pour tout $m \in \mathbf{N}_{\geq 1}$, on a

$$\begin{aligned}\bigcap_{k=1}^{m} E_k(\mathbf{a})^c &= \{x \in I : \forall k = 1, \ldots, m,\ a_k(x) \leq \lfloor a_k \rfloor\} \\ &= \bigsqcup_{b_1 \leq \lfloor a_1 \rfloor, \ldots, b_m \leq \lfloor a_m \rfloor} I_{b_1,\ldots,b_m}.\end{aligned}$$

Pour tous $m, b_1, \ldots, b_{m+1} \in \mathbf{N}_{\geq 1}$ et $x \in I_{b_1,\ldots,b_m}$, on a équivalence

$$T^m(x) \in I_{b_m+1} \Leftrightarrow a(T^m(x)) = b_{m+1} \Leftrightarrow a_{m+1}(x) = b_{m+1} \Leftrightarrow x \in I_{b_1,\ldots,b_{m+1}}$$

i.e. $T^{-m}(I_{b_{m+1}}) \cap I_{b_1,\ldots,b_m} = I_{b_1,\ldots,b_{m+1}}$. En appliquant **8.**, on a

$$\ell\left(E_{m+1}(\mathbf{a}) \cap I_{b_1,\ldots,b_m}\right) \leq 2\ell(I_{b_1,\ldots,b_m})\ell\left(E_{m+1}(\mathbf{a})\right),$$

de sorte que

$$\ell(E_{m+1}(\mathbf{a})^c \cap I_{b_1,\ldots,b_m}) \leq \ell(I_{b_1,\ldots,b_m})\,(1 - 2\ell(E_{m+1}(\mathbf{a})) \leq \ell(I_{b_1,\ldots,b_m})\left(1 - \frac{C}{a_{m+1}+1}\right),$$

où C est une constante qui ne dépend de rien puisque $\ell(E_{m+1}(\mathbf{a}))$ est de l'ordre de $1/(a_{m+1}+1)$ (en effet $\mu(\{x \in I,\ a_{m+1}(x) = k) = \mu(\{x \in I,\ a_1(x) = k\}) = 1/k - 1/(k+1)$ par **6.**, donc $\ell(E_{m+1}(\mathbf{a})) \geq C'\mu(E_{m+1}(\mathbf{a})) \geq \dfrac{C}{a_{m+1}+1}$). Par suite,

$$\begin{aligned}\ell\left(\bigcap_{k=1}^{m+1} E_k(\mathbf{a})^c\right) &= \ell\left(\bigsqcup_{b_1 \leq a_1, \ldots, b_m \leq a_m} I_{b_1,\ldots,b_m} \cap E_{m+1}(\mathbf{a})^c\right) \\ &\leq \left(1 - \frac{C}{a_{m+1}+1}\right) \sum_{b_1 \leq a_1, \ldots, b_m \leq a_m} \ell(I_{b_1,\ldots,b_m}) \\ &= \left(1 - \frac{C}{a_{m+1}+1}\right) \ell\left(\bigcap_{k=1}^{m} E_k(\mathbf{a})^c\right).\end{aligned}$$

On obtient pour tout $m \in \mathbf{N}_{\geq 1}$

$$\log \ell\left(\bigcap_{k=1}^{m+1} E_k(\mathbf{a})^c\right) \leq \log\left(1 - \frac{C}{a_{m+1}+1}\right) + \log \ell\left(\bigcap_{k=1}^{m} E_k(\mathbf{a})^c\right).$$

Par continuité des mesures, on obtient

$$\log \ell\left(\bigcap_{m\geq 1} E_m(\mathbf{a})^c\right) \leq \sum_{m\geq 1} \log\left(1 - \frac{C}{a_{m+1}+1}\right) + \log \ell(E_1(\mathbf{a})^c).$$

La série $\sum_{m\geq 1} \frac{1}{a_m+1}$ diverge (si elle converge, on aura $\frac{1}{a_m+1} \to 0$, donc $a_m \to \infty$; en particulier, $\frac{1}{a_m} \leq \frac{2}{a_m+1}$ pour m assez grand, qui implique que $\sum_{m\geq 1} \frac{1}{a_m}$ converge, c'est absurde). Il suit que

$$\sum_{m\geq 1} \log\left(1 - \frac{C}{a_{m+1}+1}\right) \leq -\sum_{m\geq 1} \frac{1}{a_{m+1}+1} = -\infty,$$

En conséquence, $\ell\left(\bigcap_{m\geq 1} E_m(\mathbf{a})^c\right) = 0$, d'où $\mu\left(\bigcap_{m\geq 1} E_m(\mathbf{a})^c\right) = 0$.
Considérons maintenant $n \geq 1$ quelconque. Soit $\mathbf{a}' := (a'_k)_{k\geq 1}$, où $a'_k = a_{k+n-1}$. Pour tout $x \in I$ et tout $m \geq n$, on a équivalence

$$\begin{aligned} x \in E_m(\mathbf{a}) &\Leftrightarrow a_m(x) > a_m \Leftrightarrow a(T^{m-1}(x)) > a_m \Leftrightarrow a(T^{m-n}(T^{n-1}(x)) > a_m \\ &\Leftrightarrow a_{m-n+1}(T^{n-1}(x)) > a'_{m-n+1} \Leftrightarrow T^{n-1}(x) \in E_{m-n+1}(\mathbf{a}'). \end{aligned}$$

Donc $E_m(\mathbf{a}) = T^{-n+1}(E_{m-n+1}(\mathbf{a}'))$. Par la μ-invariance de T, on a

$$\mu\left(\bigcap_{m\geq n} E_m(\mathbf{a})^c\right) = \mu\left(\bigcap_{m\geq n} E_{m-n+1}(\mathbf{a}')^c\right) = \mu\left(\bigcap_{m\geq 1} E_m(\mathbf{a}')^c\right) = 0.$$

La dernière égalité vient du fait que la série $\sum_{m\geq 1} \frac{1}{a'_m} = \sum_{m\geq n} \frac{1}{a_m}$ diverge, et qu'on a traité le cas où $n = 1$.

14. (a) Pour presque tout $x \in I$, on a $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log q_n(x) = \frac{\pi^2}{12 \log 2} < \log 4$ (Partie **12.**), donc il existe $N(x) \in \mathbf{N}_{n\geq 1}$ tel que

$$\forall n \geq N(x), \qquad q_n(x) < 4^n.$$

La suite $(qf(q)_q$ est décroissante, donc

$$\varphi(n) = 4^n f(4^n) \leq q_n(x) f(q_n(x))$$

pour tout $n \geq N(x)$.

(b) On a nécessairement $f(q) > 0$ pour tout q (s'il existe q_0 tel que $f(q_0) = 0$, comme $(qf(q))_q$ est décroissante, on aura $f(q) = 0$ pour tout $q \geq q_0$, qui contradit le fait que $\sum_q f(q)$ diverge). Montrons que la série $\sum_n \varphi(n)$ diverge. En effet, la suite $(f(q))_q$ est décroissante car $f(q+1) \leq \frac{qf(q)}{q+1} < f(q)$, donc

$$\sum_{q\geq 1} f(q) = \sum_{n\geq 0} \sum_{q=4^n}^{4^{n+1}-1} f(q) < \sum_{n\geq 0} 3 \cdot 4^n f(4^n) = 3 \sum_{n\geq 0} \varphi(n).$$

Il suit de **12.** que pour presque tout x, $a_{n+1}(x) > \frac{1}{\varphi(n)}$ infiniment souvent. Pour tel x et n, par (4c)

$$\left| x - \frac{p_n(x)}{q_n(x)} \right| \leq \frac{1}{q_n(x) q_{n+1}(x)} \leq \frac{1}{a_{n+1}(x) q_n(x)^2} < \frac{\varphi(n)}{q_n(x)^2}.$$

De (14a), on a

$$\left| x - \frac{p_n(x)}{q_n(x)} \right| < \frac{f(q_n(x))}{q_n(x)}$$

infiniment souvent. Mais la suite $(q_n(x))_{n\geq 1}$ est strictement croissante, d'où la preuve de la première partie du **Théorème**.