Exercice 1.— Étudier l'appartenance des distributions suivantes aux espaces de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^d)$ en fonction de $s \in \mathbb{R}$ et de $d \in \mathbb{N}^*$:

1. les fonctions $x \mapsto 1$ et $x \mapsto e^{-\|x\|^2}$, δ_0, $\partial_j \delta_0$ (où $j \in \{1, \dots, d\}$), $\partial^\alpha \delta_0$ (où $\alpha \in \mathbb{N}^d$),
2. pour $d = 1$, les fonctions $H = \mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}$, $x \mapsto e^{-|x|}$ et $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$.

Exercice 2.— On considère l'opérateur différentiel $P = \Delta^2 + \Delta - 2$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, où l'on rappelle que $\Delta = \sum_{j=1}^n \partial_j^2$ et $\Delta^2 = \Delta \circ \Delta$.

1. Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer que si $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ satisfait $Pu \in H^k(\mathbb{R}^n)$, alors $u \in H^{k+4}(\mathbb{R}^n)$.
2. P est-il injectif sur $L^2(\mathbb{R}^n)$? Sur $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$?
3. Montrer que si $T \in L^2(\mathbb{R}^n)$ vérifie $P\,T \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ alors $T \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Exercice 3.— Soit $u \in H^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$. Pour tout $\varepsilon > 0$, on définit $u_\varepsilon := \sqrt{|u|^2 + \varepsilon^2}$.

1. Soit $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$ et, pour tout $\varepsilon > 0$, $\varphi_\varepsilon := \sqrt{|\varphi|^2 + \varepsilon^2}$. Calculer $\nabla \varphi_\varepsilon$.
2. Soit $(\varphi_j)_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$ vérifiant $\varphi_j \to u$ dans $H^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$.
   (a) Montrer que $\varphi_{j,\varepsilon} \underset{j \to +\infty}{\longrightarrow} u_\varepsilon$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, où l'on a défini $\varphi_{j,\varepsilon} := \sqrt{|\varphi_j|^2 + \varepsilon^2}$.
   (b) Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, on a
   $$\frac{\mathrm{Re}\,(\bar{\varphi}_j \nabla \varphi_j)}{\varphi_{j,\varepsilon}} \underset{j \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{\mathrm{Re}\,(\bar{u} \nabla u)}{u_\varepsilon} \quad \text{dans } L^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)\,.$$
   (c) En déduire que $\nabla u_\varepsilon = \frac{\mathrm{Re}\,(\bar{u}\nabla u)}{u_\varepsilon}$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$.
3. Montrer que ∇u_ε converge dans $L^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ lorsque $\varepsilon \to 0^+$ et déterminer sa limite.
4. Montrer que $u_\varepsilon \underset{\varepsilon \to 0^+}{\longrightarrow} |u|$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.
5. En déduire que $|u| \in H^1(\mathbb{R}^d)$, et que $\|\nabla |u|\|_{L^2} \leq \|\nabla u\|_{L^2}$.

Exercice 4.—

1. Soit $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^3)$ et soit $x \in \mathbb{R}^3$.
   Montrer que $|\varphi(x)|^4 \leq 2 \int_{\mathbb{R}} |\varphi(x)|^3 |\partial_1 \varphi(x)| dx_1$ et en déduire que
   $$|\varphi(x)|^6 \leq \sqrt{8} \prod_{i=1}^3 \left(\int_{\mathbb{R}} |\varphi(x)|^3 |\partial_i \varphi(x)| dx_i \right)^{1/2}.$$

2. En intégrant successivement par rapport à x_1, x_2, x_3 et en utilisant l'inégalité de Hölder, montrer que

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\varphi(x)|^6 dx \ \leq\ \sqrt{8} \prod_{i=1}^{3} \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\varphi(x)|^3 |\partial_i \varphi(x)| dx \right)^{1/2},$$

puis que

$$\left(\int_{\mathbb{R}^3} |\varphi(x)|^6 dx \right)^{1/3} \ \leq\ 4 \prod_{i=1}^{3} \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\partial_i \varphi(x)|^2 dx \right)^{1/3}.$$

3. En déduire que, pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^3)$, on a l'inégalité de Sobolev

$$\left(\int_{\mathbb{R}^3} |\varphi(x)|^6 dx \right)^{1/6} \ \leq\ \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla \varphi(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Rappel. Pour tous $a_1, a_2, a_3 \geq 0$, on a $(a_1 a_2 a_3)^{\frac{1}{3}} \leq \frac{a_1+a_2+a_3}{3}$.

4. Soit $u \in H^1(\mathbb{R}^3)$. Montrer que $u \in L^6(\mathbb{R}^3)$ et que $\|u\|_{L^6} \leq C \|\nabla u\|_{L^2}$.
Indication. Utiliser la densité de $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^3)$ dans $H^1(\mathbb{R}^3)$.

5. En déduire que, pour tout $p \in [2, 6]$, $u \in L^p(\mathbb{R}^3)$ et $\|u\|_{L^p} \leq C_p \|u\|_{H^1}$.
Indication. Utiliser l'inégalité de Hölder et l'égalité paramétrique

$$]\,2\,,\,6\,[\ =\ \{\,2(1-\theta)\ +\ 6\theta\ ,\ \theta \in]0,1[\,\}\ .$$

6. Soit $u(x) = \|x\|^\alpha e^{-\|x\|}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Déterminer les valeurs de α pour lesquelles $u \in L^p(\mathbb{R}^3)$ (où $p \geq 1$) ainsi que celles pour lesquelles $u \in H^1(\mathbb{R}^3)$.
Peut-on étendre le résultat de la question 4 à $p > 6$?

Exercice 5.— Soient $f, g \in H^s(\mathbb{R}^d)$, où $d \in \mathbb{N}^*$ et $s \in \mathbb{R}$ vérifient $s > \frac{d}{2}$.

1. Montrer que $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et qu'il existe une constante $C_1 > 0$ telle que $\|\widehat{f}\,\|_{L^1} \leq C_1 \|f\|_{H^s}$.
En déduire que $f \in L^2(\mathbb{R}^d) \cap L^\infty(\mathbb{R}^d)$.

2. Montrer que $h = fg \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^\infty(\mathbb{R}^d)$ et que $\widehat{h} = (2\pi)^{-d} \widehat{f} * \widehat{g}$.

3. Montrer que $h = fg \in H^s(\mathbb{R}^d)$ et qu'il existe $C_2 > 0$ telle que $\|h\|_{H^s} \leq C_2 \|f\|_{H^s} \|g\|_{H^s}$.
Indication. On pourra vérifier et utiliser la relation

$$\forall\, \xi\,, \eta\ \in\ \mathbb{R}^d\,, \quad (1 + \|\xi\|^2)^{s/2}\ \leq\ 2^{s-1}\Big((1 + \|\xi - \eta\|^2)^{s/2} + (1 + \|\eta\|^2)^{s/2} \Big).$$