**Exercice 1.**— Pour $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, on définit $\mathcal{J}(T) = \check{T}$ par

$$\langle \check{T}, \varphi \rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} := \langle T, \check{\varphi} \rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} \quad \text{pour tout } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d), \text{ où } \mathcal{J}(\varphi) = \check{\varphi} : x \mapsto \varphi(-x),$$

et on dit que $T$ est paire (resp. impaire) si $\check{T} = T$ (resp. $\check{T} = -T$).

1. Montrer que $\mathcal{F} \circ \mathcal{J} = \mathcal{J} \circ \mathcal{F}$ et que $(2\pi)^d \,\mathrm{Id} = \mathcal{J} \circ \mathcal{F} \circ \mathcal{F}$ sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et sur $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.
2. Montrer que si $T$ est paire (resp. impaire) si, et seulement si, $\widehat{T}$ l'est.
3. Soit $a \in \mathbb{R}$. Déterminer les transformées de Fourier de $e^{iax}$ et de $\delta_a$.

**Exercice 2.**— Justifier que les fonctions suivantes appartiennent à $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ puis calculer leur transformée de Fourier :

$$\cos(x)\,, \quad x\sin(x)\,, \quad e^{-b|x|}\ (b > 0)\,, \quad \frac{x}{1+x^2}\,.$$

**Exercice 3.**—

1. On veut ici calculer la transformée de Fourier de $T := \mathrm{vp}(\frac{1}{x}) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$.
   (a) Montrer que $i(\widehat{T})' = 2\pi\delta_0$ puis qu'il existe $C \in \mathbb{C}$ t.q. $\widehat{T} = -2i\pi H + C$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.
   (b) Montrer que $C = i\pi$.
2. En déduire la transformée de Fourier de $H$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.
3. En utilisant le même type de raisonnement qu'à la question 1, retrouver $\widehat{\mathrm{sinc}}$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

**Exercice 4.**— Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^3)$ une fonction à support compact telle que $\int_{\mathbb{R}^3} f(x)\,dx = 0$.

1. Montrer que $\widehat{f}(\xi) = \mathcal{O}(\|\xi\|)$ au voisinage de 0.
2. En déduire l'existence d'une unique fonction $u \in L^2(\mathbb{R}^3)$ telle que $-\Delta u = f$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$.
3. Cela reste-t-il vrai sans l'hypothèse $\int_{\mathbb{R}^3} f(x)\,dx = 0$ ?

**Exercice 5.**— Dans cet exercice, $\mu$ est une mesure de probabilité sur $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$.

1. Montrer que $T_\mu : \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \longmapsto \int_{\mathbb{R}^d} \varphi\, d\mu$ définit un élément de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, puis que sa transformée de Fourier $\widehat{\mu} := \widehat{T_\mu} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ est donnée par la fonction $\xi \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ix\cdot\xi}\, d\mu(x)$.
2. On dit qu'une suite de mesures de probabilité $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ converge étroitement vers $\mu$ si :
$$\forall\, f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^d) \cap L^\infty(\mathbb{R}^d)\,, \quad \int_{\mathbb{R}^d} f d\mu_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_{\mathbb{R}^d} f d\mu\,.$$
   On veut montrer que cela équivaut à la convergence de $(T_{\mu_n})_{n\in\mathbb{N}}$ vers $T_\mu$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ et on suppose dans la suite de cette question que cette dernière convergence a lieu.

(a) Soit $f \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^d)$. En régularisant $f$ par une approximation de l'unité, montrer que

$$\int_{\mathbb{R}^d} f d\mu_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_{\mathbb{R}^d} f d\mu\,.$$

(b) Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^d)\cap L^\infty(\mathbb{R}^d)$. Pour $R > 0$, on définit $\chi_R := \chi(\frac{\cdot}{R})$, où $\chi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d; [0;1])$ vaut 1 sur $B(0,1)$ et 0 sur $\mathbb{R}^d \setminus B(0,2)$.

i. Montrer que, pour tout $R > 0$,

$$\limsup_{n\to+\infty} \Big| \int_{\mathbb{R}^d} f(1-\chi_R) d\mu_n \Big| \le \|f\|_\infty \int_{\mathbb{R}^d} (1-\chi_R) d\mu\,.$$

ii. En déduire la relation ci-dessous pour tout $R > 0$, puis conclure,

$$\limsup_{n\to+\infty} \Big| \int_{\mathbb{R}^d} f d\mu_n - \int_{\mathbb{R}^d} f d\mu \Big| \le 2\|f\|_\infty \int_{\mathbb{R}^d} (1-\chi_R) d\mu\,.$$

3. Soit $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de mesures de probabilité sur $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$. Montrer le théorème de convergence de Lévy : $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge étroitement vers $\mu$ si, et seulement si, $(\widehat{\mu_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers $\widehat{\mu}$.

*Il existe un énoncé plus fort : $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge étroitement vers une mesure de probabilité si, et seulement si, $(\widehat{\mu_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers une fonction continue en* $0$.

**Exercice 6.—** Soient $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^+)$ vérifiant $\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x)\,dx = 1$ et $\big(\varphi_\varepsilon = \varepsilon^{-d}\varphi(\frac{\cdot}{\varepsilon})\big)_{\varepsilon>0}$ l'approximation de l'identité associée.

1. Montrer que $\varphi_\varepsilon \underset{\varepsilon\to0^+}{\longrightarrow} \delta_0$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.

2. (a) Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^d)$ vérifiant $\lim\limits_{\|x\|\to+\infty} f(x) = 0$. Montrer que $f$ est uniformément continue et que $f \star \varphi_\varepsilon \underset{\varepsilon\to0^+}{\longrightarrow} f$ uniformément.

(b) Soient $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Montrer que, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$,

$$x^\alpha\big(f\star g\big) = \sum_{\beta\in\mathbb{N}^d,\ \beta\le\alpha} \binom{\alpha}{\beta} (x^{\alpha-\beta}f)\star(x^\beta g).$$

(c) En déduire que $f \star \varphi_\varepsilon \underset{\varepsilon\to0^+}{\longrightarrow} f$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ pour tout $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

*Indication. Si $f \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ et $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$, alors $\|f\star g\|_\infty \le \|f\|_\infty \|g\|_1$.*

3. Soit $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.

(a) Montrer que $T \star \varphi_\varepsilon \underset{\varepsilon\to0^+}{\longrightarrow} T$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.

(b) Soit $(\chi_\varepsilon := \chi(\varepsilon\,\cdot))_{\varepsilon>0}$, où $\chi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ vaut 1 sur $B(0,1)$ et 0 sur $\mathbb{R}^d \setminus B(0,2)$. Montrer que $\chi_\varepsilon\,(T\star\varphi_\varepsilon) \underset{\varepsilon\to0^+}{\longrightarrow} T$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.

4. Soient $p \in [1, +\infty[$ et $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$. Montrer que $f \star \varphi_\varepsilon \underset{\varepsilon\to0^+}{\longrightarrow} f$ dans $L^p(\mathbb{R}^d)$.

*Indication. On rappelle que $h \in \mathbb{R}^d \mapsto \tau_h f := f(\cdot - h) \in L^p(\mathbb{R}^d)$ est continue.*