Exercice 1.— Montrer que $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ i.e. que, pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, il existe une suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ telle que

$$\forall\, \alpha, \beta \,\in\, \mathbb{N}^d\,, \quad p_{\alpha,\beta}(\varphi_n - \varphi) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0\,.$$

Indic. Introduire $(\chi_n := \chi(\frac{\cdot}{n}))_{n\in\mathbb{N}^*}$*, où* $\chi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ *vaut* 1 *sur* $B(0,1)$ *et* 0 *sur* $\mathbb{R}^d \setminus B(0,2)$*.*

Exercice 2.— Soit $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ une fonction appartenant à $L^p(\mathbb{R}^d)$, où $p \in [1, +\infty]$. Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $\langle x\rangle^{-a} f \in L^1(\mathbb{R}^d)$.
Rappel : pour tout $c \in \mathbb{R}$*, on définit* $\langle x\rangle^c : x \in \mathbb{R}^d \mapsto \big(1 + \sum_{k=1}^d x_k^2\big)^{\frac{c}{2}} \in \mathbb{R}$.

Exercice 3.— Remarquons qu'il n'existe aucun réel a tel que $\langle x\rangle^{-a} \exp \in L^1(\mathbb{R})$. Nous souhaitons montrer qu'il n'existe en fait aucune distribution $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ vérifiant

$$T\big|_{\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})} \;=\; u_{\exp}\,, \quad \text{i.e telle que} \quad \forall\, \varphi \,\in\, \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})\,, \quad \langle T, \varphi\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} \;=\; \int_{\mathbb{R}} e^x \varphi(x)\, dx\,.$$

On introduit pour cela les suites $\big(\chi_n := \chi(\frac{\cdot}{n})\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $\big(\varphi_n : x \mapsto e^{-x}\chi_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$, où $\chi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ est une fonction positive égale à 1 sur $[2,3]$ et à 0 sur $\mathbb{R} \setminus [1,4]$.

1. Montrer que φ_n appartient à $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et que la suite $\big(p_{\alpha,\beta}(\varphi_n)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$.
2. Montrer que $\int_{\mathbb{R}} e^x \varphi_n(x)\, dx \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et conclure.

Exercice 4.— Soit $f : x \in \mathbb{R} \mapsto e^x\, e^{ie^x} \in \mathbb{C}$.

1. Existe-t-il un réel $a > 0$ vérifiant $\langle x\rangle^{-a} f \in L^1(\mathbb{R})$?
2. Montrer que l'intégrale $\int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)\, dx$ est définie au sens de Riemann pour tout φ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ et que $u_f : \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \longmapsto \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)\, dx$ définit un élément de $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

Exercice 5.—

1. Dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, montrer que s'il existe $C \in \mathbb{C}$ tel que $T = u_C$, alors $T' = 0$.
2. Montrons l'implication réciproque et considérons donc $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ telle que $T' = 0$.
   (a) Montrer que $\{\varphi' \;;\; \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})\} = \{\psi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})\,,\; \int_{\mathbb{R}} \psi\, dx = 0\}$.
   (b) Soit $\chi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ d'intégrale 1. Montrer la relation suivante et conclure,
   $$\forall\, \varphi \,\in\, \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})\,, \quad \langle T, \varphi\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} = \langle T, \chi\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} \int_{\mathbb{R}} \varphi\,.$$
3. Résoudre les équations $T' = \delta_0$ et $T' = H := \mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}$ (i.e. $T' = u_H$) dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

Exercice 6.— Déterminer les dérivées successives de $\frac{x^n}{n!}H$ (où $n \in \mathbb{N}^*$) dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ ainsi que la dérivée de $x^\alpha H$, où $\alpha \in]0,1[$.

Exercice 7.—

1. Soit $\chi \in L^1(\mathbb{R}^d)$ telle que $\int_{\mathbb{R}^d} \chi(x)\,dx = 1$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, on définit
$$\chi_{n,\alpha} : x \in \mathbb{R}^d \longmapsto n^\alpha \chi(nx)\,.$$
Étudier la convergence de la suite $(u_{\chi_{n,\alpha}})_{n\in\mathbb{N}^*}$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ en fonction de α.

2. Montrer que les suites suivantes convergent dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ vers des limites que l'on précisera :
$$(u_{n^{10}\,e^{inx}})_{n\in\mathbb{N}^*}\,,\ (u_{\cos^2(nx)})_{n\in\mathbb{N}^*}\,,\ (u_{n\sin(nx)H})_{n\in\mathbb{N}^*}\,,\ \big(n(\delta_{\frac{1}{n}} - \delta_{-\frac{1}{n}})\big)_{n\in\mathbb{N}^*}\,,\ \Big(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\delta_{\frac{k}{n}}\Big)_{n\in\mathbb{N}^*}\,.$$

Exercice 8.—

1. Montrer que l'application
$$\mathrm{vp}(\frac{1}{x}) : \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \longmapsto \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{|x|\geq\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx \in \mathbb{C}$$
est bien définie et définit un élément de $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.
Indication. Étudier séparément $\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{1\geq|x|\geq\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x}\,dx$ *en remarquant que* $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ *s'écrit* $\varphi = \varphi(0) + x\psi$ *pour une fonction* $\psi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ *telle que* $\sup_\mathbb{R}|\psi| \leq \sup_\mathbb{R}|\varphi'|$.

2. Même question pour
$$\mathrm{Pf}(\frac{1}{x^2}) : \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \longmapsto \lim_{\varepsilon\to 0^+}\Big(\int_{|x|\geq\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x^2}\,dx - 2\frac{\varphi(0)}{\varepsilon}\Big) \in \mathbb{C}\,.$$

3. Montrer que $x\,\mathrm{vp}(\frac{1}{x}) = 1$ et $x^2\,\mathrm{Pf}(\frac{1}{x^2}) = 1$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

4. Montrer que $(\ln|x|)' = \mathrm{vp}(\frac{1}{x})$ et que $\mathrm{vp}(\frac{1}{x})' = -\mathrm{Pf}(\frac{1}{x^2})$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

Exercice 9.—

1. Montrer que $x\delta_0 = 0$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

2. Montrer que si $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ vérifie $xT = 0$, alors il existe $C \in \mathbb{C}$ tel que $T = C\delta_0$.
Indication. Montrer d'abord que $\{x \mapsto x\,\varphi(x)\ ;\ \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})\} = \{\psi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})\,,\ \psi(0) = 0\}$.

3. Résoudre dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ l'équation $x^pT = 0$, où $p \in \mathbb{N}^*$.

4. Résoudre les équations $xT = 1$ et $x^2T = 1$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, d'inconnue $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

Exercice 10.— Pour $\varepsilon > 0$, soit T_ε la distribution donnée par la fonction $f_\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ suivante
$$f_\varepsilon(x) = \ln(x + i\varepsilon) = \ln|x + i\varepsilon| + i\arg(x + i\varepsilon) \qquad (\text{ avec } \arg(x+i\varepsilon) \in]-\pi, \pi[\,).$$

1. Montrer que la suite (T_ε) converge dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ vers une distribution T_0 associée à une fonction f_0 que l'on précisera.

2. Calculer T_0'

3. En déduire que $\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{1}{x+i\varepsilon} = \frac{1}{x+i0} := -i\pi\delta_0 + \mathrm{vp}(\frac{1}{x})$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.