Exercice 1.— On considère les endomorphismes suivants de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$:

$$H = -\frac{d^2}{dx^2}+x^2 : \varphi \mapsto -\varphi''+x^2\varphi\,, \quad X = \frac{d}{dx}+x : \varphi \mapsto \varphi'+x\varphi \quad \text{et} \quad X^* = -\frac{d}{dx}+x : \varphi \mapsto -\varphi'+x\varphi\,.$$

1. Montrer que $H = X^*X + \mathrm{Id} = XX^* - \mathrm{Id}$.

2. Déterminer $\operatorname{Ker} X$ et $\operatorname{Ker} X^*$.

3. Soit $\varphi_0 : x \in \mathbb{R} \mapsto \pi^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{x^2}{2}} \in \mathbb{R}$. Montrer que :
$$\forall k \in \mathbb{N}\,, \quad H\big((X^*)^k\varphi_0\big) \;=\; (2k+1)\,(X^*)^k\varphi_0\,.$$

4. (a) Montrer que $\langle H\varphi, \psi\rangle_{L^2} = \langle \varphi, H\psi\rangle_{L^2}$ pour tous φ, ψ appartenant à $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.
   (b) En déduire que la famille $\big((X^*)^k\varphi_0\big)_{k\in\mathbb{N}}$ est orthogonale dans L^2.
   (c) Montrer que $\big\|(X^*)^k\varphi_0\big\|_{L^2}^2 = 2^k\,k!$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
   (d) Soit $h \in L^2(\mathbb{R})$ vérifiant $\int_{\mathbb{R}} h(x)\, x^n e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
      i. Montrer que $g : z \in \mathbb{C} \mapsto \int_{\mathbb{R}} h(x)\, e^{-\frac{x^2}{2}}\, e^{-ixz}\, dx$ est bien définie et holomorphe.
      ii. En déduire que g est nulle, puis que h l'est aussi.
      iii. Qu'en déduit-on sur la famille $\big(c_k\,(X^*)^k\varphi_0\big)_{k\in\mathbb{N}}$, où $c_k := (2^k\,k!)^{-\frac{1}{2}}$?

Exercice 2.— Pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et tout $p \in \mathbb{N}$, on définit
$$N_p(\varphi) \;:=\; \sum_{|\alpha|,|\beta|\le p} \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |x^\alpha \partial^\beta \varphi(x)| \;\in\; \mathbb{R}^+\,.$$

1. Soit (E,d) un espace métrique.
   (a) Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ une fonction croissante nulle en 0, strictement positive sur $\mathbb{R}^{+*}$ et sous-additive, i.e. vérifiant $f(u+v) \le f(u) + f(v)$ pour tous $u, v \in \mathbb{R}^+$.
   Montrer que $f(d) : (x,y) \in E\times E \mapsto f(d(x,y))$ est une distance sur E.
   (b) Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ une fonction concave vérifiant $f(0) \ge 0$. Montrer que f est sous-additive.
   (c) En déduire que $\frac{d}{1+d}$ et $\min(1,d)$ sont des distances sur E.

2. On définit $d_{\mathcal{S}} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)\times\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}^+$ par :
$$\forall\, \varphi, \psi \;\in\; \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)\,, \quad d_{\mathcal{S}}(\varphi,\psi) \;=\; \sum_{p\in\mathbb{N}} 2^{-p}\frac{N_p(\varphi-\psi)}{1+N_p(\varphi-\psi)}\,.$$
   (a) Montrer que $(\mathcal{S}(\mathbb{R}^d), d_{\mathcal{S}})$ est un espace métrique vérifiant :
$$\varphi_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \varphi \;\text{ pour } d_{\mathcal{S}} \qquad \text{ssi} \qquad \forall\, p \in \mathbb{N}\,, \quad N_p(\varphi_n-\varphi) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0\,.$$
   (b) Montrer que l'espace métrique $(\mathcal{S}(\mathbb{R}^d), d_{\mathcal{S}})$ est complet.