Exercice 1.— Soient $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ deux fonctions et $p, q, r \in [1, +\infty]$ vérifiant

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r} \quad \text{et} \quad f \in L^p(\mathbb{R}^n),\ g \in L^q(\mathbb{R}^n).$$

1. Montrer que, si $r = +\infty$, alors $f \star g$ est bien définie, uniformément continue et bornée par $\|f\|_p \|g\|_q$.
2. Montrer que, si $r = +\infty$ et si $p > 1$, alors $f \star g$ tend vers 0 à l'infini.
   Indication. On pourra commencer par considérer f et g dans $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$.
3. Montrer, dans tous les cas, que $f \star g$ est définie p.p., appartient à $L^r(\mathbb{R}^n)$ et vérifie

$$\|f \star g\|_r \leq \ \|f\|_p \|g\|_q \quad \text{(inégalité de Young)}\,.$$

Exercice 2.— En utilisant la transformée de Fourier :

1. montrer que le produit de convolution n'admet pas d'élément unité $e \in L^1(\mathbb{R})$, i.e. :

$$\nexists\, e \in L^1(\mathbb{R})\,,\ \ \forall f \in L^1(\mathbb{R})\,, \qquad e \star f \ =\ f \star e \ =\ f\,.$$

2. déterminer toutes les fonctions $f \in L^1(\mathbb{R})$ telles que $f \star f = f$.

Exercice 3.— Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ une fonction à support compact, i.e. nulle presque partout en dehors d'un compact de $\mathbb{R}$.

1. Montrer que $\hat{f}$ se prolonge en une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$.
2. Que peut-on en déduire si f et $\hat{f}$ sont à support compact.

Exercice 4.— Pour tout $a > 0$, on définit $g_a : x \in \mathbb{R} \mapsto e^{-a|x|}$ et $h_a : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{a}{a^2+x^2} \in \mathbb{R}$.

1. Expliciter $\widehat{g}_a$ et en déduire que $\widehat{h}_a(t) = \pi e^{-a|t|}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
   On souhaite maintenant déterminer toutes les fonctions $f \in L^1(\mathbb{R})$ vérifiant

$$(\star) \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}\,, \quad \int_{\mathbb{R}} \frac{f(t)}{a^2 + (x-t)^2} \mathrm{d}t \ =\ \frac{1}{b^2 + x^2}\,, \quad \text{où } a, b \in \mathbb{R}^{+*} \text{ sont fixés.}$$

2. Écrire cette relation à l'aide d'un produit de convolution.
3. Montrer qu'il n'existe aucune solution de $(\star)$ lorsque $0 < b \leq a$.
4. Montrer que si $0 < a < b$, il existe une unique solution de $(\star)$ que l'on déterminera.

Exercice 5.— Le but de cet exercice est de montrer que la transformée de Fourier n'est pas une surjection de $L^1(\mathbb{R})$ sur $\big\{g \in \mathcal{C}(\mathbb{R}) \mid \lim_{x\to\pm\infty} g(x) = 0\big\}$.

1. Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ impaire. Montrer que, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, $\hat{f}(\xi) \;=\; -2i \int_0^{+\infty} f(x)\sin(x\xi)\,dx$.
2. On rappelle que $x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{\sin x}{x} \in \mathbb{R}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ au sens de Riemann. En déduire que la fonction $\varphi : x \in \mathbb{R} \mapsto \int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$, définie au sens de Riemann, est bornée.
3. Montrer que, pour toute fonction $f \in L^1(\mathbb{R})$ impaire et tout $R \geq 1$,

$$\int_1^R \frac{\hat{f}(\xi)}{\xi}\,d\xi \;=\; -2i\int_0^{+\infty} f(x)\Big(\int_x^{Rx} \frac{\sin t}{t}\,dt\Big)\,dx \quad \text{puis que} \quad \int_1^R \frac{\hat{f}(\xi)}{\xi}\,d\xi \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} -2i\int_0^{+\infty} f(x)\varphi(x)\,dx\,.$$

4. Soit $g : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{\arctan x}{\ln(e+x^2)}$. Supposons qu'il existe $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $g = \hat{f}$.
   (a) Montrer que f est (presque partout) impaire.
   (b) Conclure, en aboutissant à une contradiction.

Exercice 6.— Considérons la fonction $f = \mathbf{1}_{[-1,1]}$.

1. Calculer sa transformée de Fourier.
2. Donner la valeur de l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2(x)}{x^2}\,dx$.
3. Calculer la convoluée $f \star f$ puis sa transformée de Fourier.
4. En déduire, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, la valeur de $\int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi}\,\frac{\sin^2(x)}{x^2}\,dx$.

Exercice 7.— Considérons les fonctions

$$f : x \in \mathbb{R} \;\longmapsto\; \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \frac{\sin x}{|x|} & \text{si } x \neq 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \mathrm{sinc} : x \in \mathbb{R} \;\longmapsto\; \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ \frac{\sin x}{x} & \text{si } x \neq 0 \end{cases}.$$

1. Déterminer une constante $a > 0$ telle que :

$$\forall\, n \,\in \mathbb{N}^*\,, \quad \int_{-\frac{\pi}{2}+n\pi}^{\frac{\pi}{2}+n\pi} \frac{|\sin x|}{|x|}\,dx \;\geq\; \frac{a}{n+1}$$

   et en déduire que f et sinc n'appartiennent pas à $L^1(\mathbb{R})$.
2. Qu'en déduit-on sur les transformées de Fourier de ces fonctions ?
3. En utilisant l'exercice précédent, donner l'expression $\widehat{\mathrm{sinc}} \in L^2(\mathbb{R})$.

   Pour tout $\varepsilon > 0$, on définit $f_\varepsilon : x \in \mathbb{R} \mapsto f(x)e^{-\varepsilon|x|} \in \mathbb{R}$.
4. Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, la fonction f_ε appartient à $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ et converge vers f dans $L^2(\mathbb{R})$ lorsque $\varepsilon \to 0^+$.
5. Montrer que $\widehat{f_\varepsilon} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ et vérifie

$$\forall \xi \in \mathbb{R}\,,\quad (\widehat{f_\varepsilon})'(\xi) \;=\; -2i\int_{\mathbb{R}^+} e^{-\varepsilon x}\sin(x)\cos(x\xi)\,dx \;=\; i\frac{\xi-1}{\varepsilon^2+(\xi-1)^2} - i\frac{\xi+1}{\varepsilon^2+(\xi+1)^2}.$$

6. En déduire l'expression de $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R})$.