Exercice 1.— Soit $n \geq 2$ un entier.

1. En utilisant la formule des résidus, déterminer la valeur de

$$\int_{\mathbb{R}^+} \frac{1}{1+x^n}\, dx\,.$$

Indic. Pour $0 < \varepsilon < R$, *on pourra considérer le domaine* $\{re^{i\theta} \,|\, r \in [\varepsilon, R], \theta \in [0, \frac{2\pi}{n}]\}$.

On suppose maintenant que $n > 2$ et on s'intéresse, pour $\alpha \in \mathbb{R}$, à la fonction

$$f_\alpha : x \in \mathbb{R}^{+*} \longmapsto \frac{x^\alpha}{1+x^n} \in \mathbb{R}\,.$$

2. Pour quelles valeurs de α a-t-on $f_\alpha \in L^1(\mathbb{R}^+)$?
3. En procédant comme à la question 1, déterminer la valeur de $\int_{\mathbb{R}^+} f_\alpha(x)\, dx$ pour un tel α.

Exercice 2.— Soient P et Q deux polynômes non nuls premiers entre eux. On suppose que

$$\deg Q \geq \deg P + 2 \quad \text{et que} \quad Q \neq 0 \text{ sur } \mathbb{R}.$$

Soient $a_1, \ldots, a_k$ les racines complexes de Q de partie imaginaire strictement positive.

1. Montrer que $\frac{P}{Q} \in L^1(\mathbb{R})$ puis que

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{P(x)}{Q(x)}\, dx \;=\; 2\pi i \sum_{j=1}^{k} \mathrm{Res}_{a_j} \frac{P}{Q}\,.$$

2. En déduire la valeur de

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{x(1+x)}{(1+x^2)^2}\, dx\,.$$

Exercice 3.— La fonction Gamma d'Euler est défini sur $\mathbb{C}_{>0} := \{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Re} z > 0\}$ par :

$$\forall z \in \mathbb{C}_{>0}\,, \quad \Gamma(z) \;:=\; \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t}\, dt\,.$$

1. Montrer que la fonction $\Gamma : \mathbb{C}_{>0} \to \mathbb{C}$ est bien définie et qu'elle est holomorphe.
2. Montrer que :

$$\forall z \in \mathbb{C}_{>0}\,, \quad \Gamma(z) \;=\; \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{n!\,(z+n)} \;+\; \int_1^{+\infty} t^{z-1} e^{-t}\, dt\,.$$

3. Montrer que $z \mapsto \int_1^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}\,dt$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$.

4. Que peut-on en déduire sur Γ ?

Exercice 4.— Soit a un réel strictement positif. Justifier l'existence, puis déterminer l'expression de la transformée de Fourier de la fonction $x \in \mathbb{R} \longmapsto e^{-a|x|} \in \mathbb{R}$.

Exercice 5.— Soient $a > 0$ et $f_a : x \in \mathbb{R} \mapsto e^{-ax^2} \in \mathbb{R}$. On rappelle que $\int_{\mathbb{R}} f_a(x)\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$.

1. Montrer que $\widehat{f_a} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ et vérifie $(\widehat{f_a}\,)'(\xi) = -\frac{\xi}{2a}\widehat{f_a}(\xi)$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}$.

2. En déduire que $\widehat{f}(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{\xi^2}{4a}}$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}$.

3. Soit $z \in \mathbb{C}_{>0}$. Montrer que $x \in \mathbb{R} \mapsto e^{-zx^2} \in \mathbb{C}$ appartient à $L^1(\mathbb{R})$ et établir la relation
$$\forall \xi \in \mathbb{R}\,, \quad \mathcal{F}(e^{-zx^2})(\xi) \;=\; \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{z}}\, e^{-\frac{\xi^2}{4z}}\,.$$

Exercice 6.— Soit $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ telle que u et u' appartiennent à $L^1(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $u(x) \underset{|x|\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

2. Trouver un exemple de fonction $v \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ ne vérifiant pas cette relation.

3. Montrer que, $\widehat{u'}(\xi) = i\xi\,\widehat{u}(\xi)$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}$.

Exercice 7.— Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique définie positive. On veut montrer que :
$$\forall \xi \in \mathbb{R}^n\,, \quad \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi}\, e^{-Ax\cdot x}\,dx \;=\; \sqrt{\frac{\pi^n}{\det A}}\,e^{-\frac{A^{-1}\xi\cdot\xi}{4}}\,.$$
On rappelle qu'il existe une matrice $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^tP\,P = I_n$ et telle que ${}^tP\,A\,P = D$, où $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice diagonale de valeurs propres strictement positives.

1. Montrer le résultat lorsque A est une matrice diagonale.

2. En déduire le résultat dans le cas général.

Exercice 8.— Soient f et g deux fonctions dans $L^1(\mathbb{R}^n)$.

1. Montrer que $f \star g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy$ est définie pour presque tout $x \in \mathbb{R}^n$ et vaut $g \star f(x)$ pour ces x, puis que $f \star g$ appartient à $L^1(\mathbb{R}^n)$ et vérifie
$$\|f \star g\|_1 \;\leq\; \|f\|_1\,\|g\|_1\,.$$

2. Montrer que $\widehat{f \star g} = \widehat{f}\,\widehat{g}$.

3. On suppose maintenant que $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ et que $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$, où $1 \leq p \leq +\infty$.
   Montrer que $f \star g$ est définie p.p., appartient à $L^p(\mathbb{R}^n)$ et vérifie $\|f \star g\|_p \leq \;\|f\|_1\,\|g\|_p$.