Corrigé du contrôle continu du 3 mars 2025

1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ une fonction appartenant à $L^1(\mathbb{R}^n)$.

   (a) Donner la définition de la transformée de Fourier $\widehat{f}$ de f.
   La fonction $\widehat{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ est définie par $\widehat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\cdot\xi} f(x)\,dx$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}$.

   (b) Donner quelques propriétés de la fonction $\widehat{f}$ (on ne demande aucune justification).
   La fonction $\widehat{f}$ est continue sur $\mathbb{R}^n$, bornée par $\|f\|_1$ et tend vers 0 quand $\|\xi\| \to +\infty$.

   (c) Montrer que si f est paire (resp. impaire), alors $\widehat{f}$ l'est aussi.
   Si $f(-x) = f(x)$ (resp. $f(-x) = -f(x)$) pour (presque) tout $x \in \mathbb{R}$, alors

$$\begin{aligned} \forall\,\xi \in \mathbb{R}\,, \quad \widehat{f}(-\xi) \;=\; \int_{\mathbb{R}} e^{ix\cdot\xi} f(x)\,dx \;&\underset{y=-x}{=}\; \int_{\mathbb{R}} e^{-iy\cdot\xi} f(-y)\,dy \\ &=\; \int_{\mathbb{R}} e^{-iy\cdot\xi} f(y)\,dy \;=\; \widehat{f}(\xi) \\ (\textit{resp.} \quad &=\; -\int_{\mathbb{R}} e^{-iy\cdot\xi} f(y)\,dy \;=\; -\widehat{f}(\xi)\ ), \end{aligned}$$

   donc $\widehat{f}$ est bien paire (resp. impaire).

2. Dans cette question, f est une fonction appartenant à $L^1(\mathbb{R})$.

   (a) Montrer que si $xf : x \mapsto x\,f(x) \in L^1(\mathbb{R})$, alors $\widehat{f} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ et $\widehat{xf} = i\,(\widehat{f}\,)'$.
   Soit $h : (x,\xi) \in \mathbb{R}^2 \mapsto e^{-ix\xi} f(x)$. Alors :
   – pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, $x \mapsto h(x,\xi) \in L^1(\mathbb{R})$ (car $|h(x,\xi)| = |f(x)|$ et $f \in L^1(\mathbb{R})$),
   – pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\xi \mapsto h(x,\xi)$ est de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ et pour tout $\xi \in \mathbb{R}$,

$$\Big|\frac{\partial h}{\partial \xi}(x,\xi) = -ix\,e^{-ix\xi} f(x)\Big| \;=\; |xf(x)| \quad \textit{ne dépend pas de } \xi \in \mathbb{R} \textit{ et } xf \in L^1(\mathbb{R}).$$

   Il découle du théorème de dérivation sous le signe intégral que $\widehat{f} : \xi \mapsto \int_{\mathbb{R}} h(x,\xi)\,dx$ est de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ et que pour tout $\xi \in \mathbb{R}$,

$$\widehat{xf}(\xi) \;=\; \int_{\mathbb{R}} xe^{-ix\xi} f(x)\,dx \;=\; i\int_{\mathbb{R}} -ixe^{-ix\xi} f(x)\,dx \;=\; i\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial h}{\partial \xi}(x,\xi)\,dx \;=\; i\,(\widehat{f}\,)'(\xi).$$

   (b) Montrer que si $\xi\,\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, alors f admet un représentant de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$. On commencera par montrer que l'on a $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$.
   D'abord, $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ car $\|\widehat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$ et donc, comme de plus $\xi\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$,

$$\int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}(\xi)|\,d\xi \;=\; \int_{]-1,1[} |\widehat{f}(\xi)|\,d\xi + \int_{]-1,1[^c} |\widehat{f}(\xi)|\,d\xi \;\leq\; 2\|f\|_1 + \int_{]-1,1[^c} |\xi||\widehat{f}(\xi)|\,d\xi \;<\; +\infty\,.$$

   D'après la formule d'inversion de Fourier, $f(x)$ est presque partout égale à $\frac{1}{2\pi}\widehat{(\widehat{f}\,)}(-x)$

(donc f admet un représentant continu puisque, $\widehat{f}$ étant dans $L^1(\mathbb{R})$, sa transformée de Fourier est continue). Comme de plus $\xi\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, il découle de la question précédente (appliquée à $\widehat{f}$!) que $\widehat{(\widehat{f})}$ est de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, et donc que f admet un représentant de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ (i.e. que le représentant continu de f, unique, est de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$).

3. Soit $a > 0$. On définit la fonction

$$g : x \in \mathbb{R} \ \longmapsto \ \frac{x}{x^2 + a^2}\,.$$

(a) Montrer que $g \notin L^1(\mathbb{R})$ mais que $g \in L^2(\mathbb{R})$.

La fonction g est continue sur $\mathbb{R}$ donc g et g^2 y sont intégrables sur tout compact. De plus, $|g(x)| \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x}$ et $x \mapsto \frac{1}{x}$ n'est pas intégrable au voisinage de $+\infty$. Il en découle que $g \notin L^1(\mathbb{R})$.
En revanche, comme $|g(x)|^2 \underset{|x|\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x^2}$ et $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ est intégrable au voisinage de $\pm\infty$, alors $g \in L^2(\mathbb{R})$.

(b) Soit $\xi \in \mathbb{R}$. En considérant la fonction méromorphe $z \mapsto \frac{z}{z^2+a^2}e^{-iz\xi}$, montrer que pour tout $R > a$, on a

$$\int_{-R}^{R} e^{-ix\xi} g(x)\,dx \ + \ i\int_0^{\pi} \frac{R^2\,e^{2i\theta}}{R^2\,e^{2i\theta} + a^2}\,e^{-iRe^{i\theta}\xi}\,d\theta \ = \ i\,\pi\,e^{a\,\xi}\,.$$

Comme $z^2+a^2 = (z-ia)(z+ia)$ et la fonction $z \in \mathbb{C} \mapsto ze^{-iz\xi}$ est holomorphe et ne s'annule pas en $\pm ia$, la fonction $z \mapsto \frac{z}{z^2+a^2}e^{-iz\xi}$ est méromorphe avec uniquement deux pôles, simples, en $\pm ia$. Son résidu en ia vaut donc

$$\mathrm{Res}(ia) \ = \ \lim_{z\to ia}(z - ia)\frac{z}{z^2+a^2}e^{-iz\xi} \ = \ \lim_{z\to ia}\frac{z}{z+ia}e^{-iz\xi} \ = \ \frac{1}{2}e^{a\xi}\,.$$

Pour tout $R > a$, la formule des résidus appliquée à $z \mapsto \frac{z}{z^2+a^2}e^{-iz\xi}$ sur le demi-cercle supérieur de centre 0 de de rayon R du plan complexe conduit donc à

$$\int_{-R}^{R} e^{-ix\xi} g(x)\,dx + \int_0^{\pi} \frac{R\,e^{i\theta}}{R^2\,e^{2i\theta}+a^2}\,e^{-iRe^{i\theta}\xi}\,\underbrace{iRe^{i\theta}}_{(R\,e^{i\,\cdot})'(\theta)}\,d\theta \ = \ 2i\pi\,\mathrm{Res}(ia) \ = \ i\,\pi\,e^{a\,\xi}\,.$$

(c) Montrer que, pour tout $\xi < 0$, on a

$$\int_{-R}^{R} e^{-ix\xi} g(x)\,dx \ \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} \ i\,\pi\,e^{a\,\xi}\,.$$

D'après la question précédente, il suffit de montrer que

$$\int_0^{\pi} \frac{R^2\,e^{2i\theta}}{R^2\,e^{2i\theta}+a^2}\,e^{-iRe^{i\theta}\xi}\,d\theta \ \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} \ 0\,.$$

Cela se déduit du théorème de convergence dominée, qui s'applique car, pour tous $R > a$ et $\theta \in [0,\pi]$,

$$\left|\frac{R^2\,e^{2i\theta}}{R^2\,e^{2i\theta}+a^2}\,e^{-iRe^{i\theta}\xi}\right| \ = \ \frac{R^2}{|R^2\,e^{2i\theta}+a^2|}\,e^{R\,\xi\,\sin\theta} \ \leq \ \frac{R^2}{R^2-a^2}\,e^{R\,\xi\,\sin\theta}$$

et donc, puisque $\xi < 0$, on a bien la :

– **Domination par rapport à** R **:** *comme* $\sin\theta \geq 0$ *pour tout* $\theta \in [0,\pi]$,

$$\Big|\frac{R^2\,e^{2i\theta}}{R^2\,e^{2i\theta}+a^2}\,e^{-iRe^{i\theta}\xi}\Big| \;\leq\; \frac{R^2}{R^2-a^2} \;\leq\; 2 \in L^1[0,\pi] \text{ pour tout } R > a \text{ assez grand (car } \frac{R^2}{R^2-a^2} \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} 1\text{),}$$

– **Convergence :** *comme* $\sin > 0$ *sur* $]0,\pi[$, *pour tout* $\theta \in]0,\pi[$ *et donc p.p.,*

$$\Big|\frac{R^2\,e^{2i\theta}}{R^2\,e^{2i\theta}+a^2}\,e^{-iRe^{i\theta}\xi}\Big| \;\leq\; \frac{R^2}{R^2-a^2}\,e^{R\,\xi\,\sin\theta} \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} 0\,.$$

(d) En déduire que, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, on a

$$\int_{-R}^{R} e^{-ix\xi}g(x)\,dx \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} -i\,\mathrm{signe}(\xi)\,\pi\,e^{-a|\xi|}\,, \quad \text{où} \quad \mathrm{signe}(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{si } \xi > 0\,,\\ 0 & \text{si } \xi = 0\,,\\ -1 & \text{si } \xi < 0\,.\end{cases}$$

Lorsque $\xi < 0$, le résultat a été démontré dans la question précédente.
En remarquant de plus que $\xi \mapsto \int_{-R}^{R} e^{-ix\xi}g(x)\,dx$ est la transformée de Fourier de la fonction impaire $g\mathbf{1}_{[-R,R]} \in L^1(\mathbb{R})$, elle est également impaire (cf. question 1.(c)) et donc sa limite simple lorsque $R \to +\infty$ l'est aussi, d'où l'expression lorsque $\xi > 0$ et lorsque $\xi = 0$ (une fonction impaire est nulle en 0).

(e) Déterminer l'expression de la transformée de Fourier de g dans $L^2(\mathbb{R})$.

Comme $g \in L^2(\mathbb{R})$, la transformée de Fourier de g dans $L^2(\mathbb{R})$ est donnée d'après le cours par la limite dans $L^2(\mathbb{R})$ lorsque $R \to +\infty$ de $\xi \mapsto \int_{-R}^{R} e^{-ix\xi}g(x)\,dx$.

(En effet, $g\mathbf{1}_{[-R,R]}$ converge vers g dans $L^2(\mathbb{R})$ par convergence dominée, donc la transformée de Fourier de $g\mathbf{1}_{[-R,R]} \in L^1(\mathbb{R})\cap L^2(\mathbb{R})$, à savoir $\xi \mapsto \int_{-R}^{R} e^{-ix\xi}g(x)\,dx$, converge vers $\widehat{g}$ dans $L^2(\mathbb{R})$, par continuité de $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$.)

La convergence dans $L^2(\mathbb{R})$ impliquant la convergence presque partout d'une suite extraite, il existe une suite $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendant vers $+\infty$ telle que $\int_{-R_n}^{R_n} e^{-ix\xi}g(x)\,dx$ converge vers $\widehat{g}(\xi)$ pour presque tout $\xi \in \mathbb{R}$. D'après la question précédente, il vient

$$\widehat{g} = \big(\xi \mapsto -i\,\mathrm{signe}(\xi)\,\pi\,e^{-a|\xi|}\big) \text{ presque partout et donc dans } L^2(\mathbb{R}).$$

Remarque. *On peut se passer de l'argument du paragraphe précédent en utilisant le lemme de Fatou. Démontrons en effet le résultat suivant plus général : soient $(X,\mathcal{M},\mu)$ un espace mesuré, $p \in [1,+\infty]$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $L^p(X)$ convergeant presque partout vers $g : X \to \mathbb{C}$ et convergeant vers f dans $L^p(X)$.*
Alors $f = g$ presque partout, i.e. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers g dans $L^p(X)$.

En effet :
– si $p = +\infty$, c'est évident (pourquoi ?),
– sinon, le lemme de Fatou conduit à

$$\int_X |f-g|^p\,d\mu \;=\; \int_X \liminf_{n\to+\infty} |f-f_n|^p\,d\mu \;\leq\; \liminf_{n\to+\infty} \int_X |f-f_n|^p\,d\mu \;=\; 0,$$

ce qui implique $|f-g|^p = 0$, et donc $f = g$, presque partout.

Attention : On notera bien que l'expression $\int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi}g(x)\,dx$ n'a pas de sens par la théorie de l'intégration de Lebesgue puisque $g \notin L^1(\mathbb{R})$!!