Contrôle continu du 3 mars 2025

Durée : une heure.

1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ une fonction appartenant à $L^1(\mathbb{R}^n)$.
   (a) Donner la définition de la transformée de Fourier $\widehat{f}$ de f.
   (b) Donner quelques propriétés de la fonction $\widehat{f}$ (on ne demande aucune justification).
   (c) Montrer que si f est paire (resp. impaire), alors $\widehat{f}$ l'est aussi.

2. Dans cette question, f est une fonction appartenant à $L^1(\mathbb{R})$.
   (a) Montrer que si $xf : x \mapsto x\, f(x) \in L^1(\mathbb{R})$, alors $\widehat{f} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ et $\widehat{xf} = i\,(\widehat{f}\,)'$.
   (b) Montrer que si $\xi\,\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, alors f admet un représentant de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$. On commencera par montrer que l'on a $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$.

3. Soit $a > 0$. On définit la fonction

$$g : x \in \mathbb{R} \longmapsto \frac{x}{x^2 + a^2}\,.$$

   (a) Montrer que $g \notin L^1(\mathbb{R})$ et que $g \in L^2(\mathbb{R})$.
   (b) Soit $\xi \in \mathbb{R}$. En considérant la fonction méromorphe $z \mapsto \frac{z}{z^2+a^2} e^{-iz\xi}$, montrer que pour tout $R > a$, on a

$$\int_{-R}^{R} e^{-ix\xi} g(x)\,dx \;+\; i \int_0^{\pi} \frac{R^2\, e^{2i\theta}}{R^2\, e^{2i\theta} + a^2}\, e^{-iRe^{i\theta}\xi}\, d\theta \;=\; i\,\pi\, e^{a\,\xi}\,.$$

   (c) Montrer que, pour tout $\xi < 0$, on a

$$\int_{-R}^{R} e^{-ix\xi} g(x)\,dx \underset{R \to +\infty}{\longrightarrow} i\,\pi\, e^{a\,\xi}\,.$$

   (d) En déduire que, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, on a

$$\int_{-R}^{R} e^{-ix\xi} g(x)\,dx \underset{R \to +\infty}{\longrightarrow} -i\,\mathrm{signe}(\xi)\,\pi\, e^{-a\,|\xi|}\,, \quad \text{où} \quad \mathrm{signe}(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{si } \xi > 0\,, \\ 0 & \text{si } \xi = 0\,, \\ -1 & \text{si } \xi < 0\,. \end{cases}$$

   (e) Déterminer l'expression de la transformée de Fourier de g dans $L^2(\mathbb{R})$.