Nantes Université, 2024
XMS2ME320

Analyse de Fourier
Devoir surveillé

Par définition, une mesure tempérée sur $\mathbf{R}^n$ est une distribution tempérée $\mu \in \mathscr{S}'(\mathbf{R}^n)$ *positive*, au sens où

$$\forall \varphi \in \mathscr{S}(\mathbf{R}^n), \qquad \varphi \geqslant 0 \implies \mu(\varphi) \geqslant 0.$$

On note $\mathrm{M}(\mathbf{R}^n) \subset \mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$ l'ensemble des mesures tempérées sur $\mathbf{R}^n$. Soit χ une *fonction plateau*, c'est-à-dire une fonction de $\mathscr{C}_c^\infty(\mathbf{R}^n)$ à valeurs dans $[0,1]$ telle que $\chi(x) = 1$ pour $|x| \leqslant 1$. La masse d'une mesure $\mu \in \mathrm{M}(\mathbf{R}^n)$ est par définition

$$|\mu| = \sup_{k \in \mathbf{N}} \mu(\chi_k) \in [0, \infty]$$

où on a noté $\chi_k(x) = \chi(x/k)$ pour $k > 0$. Dans toute la suite on notera

$$\mathscr{C}_0(\mathbf{R}^n) = \Big\{ \varphi \in \mathscr{C}(\mathbf{R}^n) \ : \ \varphi \underset{\infty}{\longrightarrow} 0 \Big\}$$

l'espace des fonctions continues qui tendent vers 0 à l'infini. Enfin, si $A, B \subset \mathbf{R}^n$, on notera

$$A + B = \{x + y \ : \ x \in A, \ y \in B\}.$$

Les parties **II** et **III** sont indépendantes.

I. Mesures et formes linéaires sur $\mathscr{C}_0(\mathbf{R}^n)$

1. a) Donner un exemple de mesure tempérée non nulle de masse finie.
b) Donner un exemple de mesure tempérée de masse infinie.
c) Donner un exemple de distribution qui n'est pas une mesure.

2. Soit $\mu \in \mathrm{M}(\mathbf{R}^n)$ et χ une fonction plateau.

a) Montrer que pour tout $k \in \mathbf{N}$, il existe $\ell_0 \in \mathbf{N}$ tel que $\mu(\chi_\ell) \geqslant \mu(\chi_k)$ pour tout $\ell \geqslant \ell_0$.
b) En déduire que $|\mu| = \lim\limits_{k \to \infty} \mu(\chi_k)$.
c) Montrer que $|\mu|$ ne dépend pas de la fonction plateau choisie.

3. Soit $\mu \in \mathrm{M}(\mathbf{R}^n)$.

a) Soit $\psi \in \mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$ à valeurs réelles. Montrer que $|\mu(\psi)| \leqslant |\mu| \|\psi\|_\infty$.
Indication : on pourra prendre une fonction plateau χ comme au dessus et remarquer que l'on a $-\chi_k \|\psi\|_\infty \leqslant \chi_k \psi \leqslant \chi_k \|\psi\|_\infty$.
b) Montrer que $\|\operatorname{Re} \varphi\|_\infty + \|\operatorname{Im} \varphi\|_\infty \leqslant 2\|\varphi\|_\infty$ pour $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$.
c) Déduire des questions précédentes que

$$|\mu(\varphi)| \leqslant 2|\mu| \|\varphi\|_\infty, \quad \varphi \in \mathscr{S}(\mathbf{R}^n).$$

En déduire que si $|\mu| < \infty$, alors μ s'étend à une forme linéaire continue sur $\mathscr{C}_0(\mathbf{R}^n)$, muni de $\| \cdot \|_\infty$.
Indication. Pour le dernier point on pourra montrer (ou admettre) que $\mathscr{C}_c^\infty(\mathbf{R}^n)$ est dense dans $\mathscr{C}_0(\mathbf{R}^n)$.

Dans toute la suite, on note $\mathrm{M}_c(\mathbf{R}^n)$ l'ensemble des mesures tempérées à support compact.

4. Montrer que $|\mu| < \infty$ pour tout $\mu \in \mathrm{M}_c(\mathbf{R}^n)$.

5. Soient $\mu, \nu \in \mathrm{M}_c(\mathbf{R}^n)$. Montrer que le produit de convolution $\mu \star \nu$ est bien défini au sens des distributions, et qu'on a $\mu \star \nu \in \mathrm{M}_c(\mathbf{R}^n)$ avec

$$\operatorname{supp}(\mu \star \nu) \subset \operatorname{supp} \mu + \operatorname{supp} \nu, \qquad |\mu \star \nu| = |\mu||\nu| \qquad \text{et} \qquad \widehat{\mu \star \nu} = \widehat{\mu}\, \widehat{\nu}.$$

II. Dimension de Fourier

Définition. La *dimension de Fourier* d'un ensemble non vide $A \subset \mathbf{R}^n$ est définie par

$$\dim_{\mathrm{F}} A = \sup\Big\{\alpha \leqslant n \ :\ \exists \mu \in \mathrm{P}_c(A), \quad |\widehat{\mu}(\xi)|\ |\xi|^{\alpha/2} \underset{|\xi|\to\infty}{\longrightarrow} 0\Big\}$$

où $\mathrm{P}_c(A) = \{\mu \in \mathrm{M}_c(\mathbf{R}^n)\ :\ \operatorname{supp}\mu \subset A,\ |\mu| = 1\}$ est l'ensemble des mesures de probabilités à support compact contenu dans A.

6. Soit $a \in \mathbf{R}^n$ et $\mu \in \mathrm{P}_c(\{a\})$.

(i) Montrer qu'il existe $m \in \mathbf{N}$ et $a_\alpha \in \mathbf{C}$ pour $\alpha \in \mathbf{N}^n$ avec $|\alpha| \leqslant m$, tels que $\mu = \sum_{|\alpha|} a_\alpha \partial^\alpha \delta_a$.

(ii) Montrer que si $\alpha \neq 0$ alors $a_\alpha = 0$.
Indication. Pour $\alpha \in \mathbf{N}^n$ et $\varepsilon > 0$ on pourra calculer $\mu(\varphi_\varepsilon)$ où $\varphi_\varepsilon(x) = \chi(x/\varepsilon)x^\alpha$ avec χ une fonction plateau, puis utiliser la question **3.** c).

(iii) En déduire que $\mu = \delta_a$ et que $\dim_{\mathrm{F}}\big(\{a\}\big) = 0$.

(iv) ($\star$) Montrer plus généralement que si $a_1, \ldots, a_N \in \mathbf{R}^n$ alors $\dim_{\mathrm{F}}\big(\{a_1, \ldots, a_N\}\big) = 0$.

7. Montrer que si $A \subset \mathbf{R}^n$ est ouvert et non vide alors $\dim_{\mathrm{F}} A = n$.

Dans la suite, pour $A \subset \mathbf{R}^n$ et $k \in \mathbf{N}^*$, on note $A^k = A + \cdots + A$ (k fois).

8. Soit $A \subset \mathbf{R}^n$ un ensemble non vide et $k \in \mathbf{N}^*$.

a) Soit $\mu \in \mathrm{P}_c(A)$. Montrer que si $\mu^{\star k} = \mu \star \cdots \star \mu$ (k fois) alors

$$\operatorname{supp}\mu^{\star k} \subset A^k \quad \text{et} \quad \widehat{\mu^{\star k}} = \widehat{\mu}^k.$$

b) On suppose $\dim_{\mathrm{F}} A > n/k$. Montrer que A^k a une mesure de Lebesgue positive.

c) On suppose $\dim_{\mathrm{F}} A > 2n/k$. Montrer que A^k est d'intérieur non vide.

III. L'ensemble triadique de Cantor

Soit $T : [0,1] \to [0,1]$ l'application définie par

$$T(x) = 3x - \lfloor 3x \rfloor, \qquad x \in [0,1],$$

où $\lfloor \cdot \rfloor$ désigne la partie entière. On note $J =]1/3, 2/3[$. L'ensemble triadique de Cantor C est défini par

$$C = \bigcap_{N\in\mathbb{N}} A_N \quad \text{avec} \quad A_N = \big\{x \in [0,1]\ :\ T^\ell(x) \notin J,\ \ell = 0, \ldots, N\big\},$$

où $T^N = T \circ \cdots \circ T$ (N fois) et $T^0 = \mathrm{id}$.

9. Tracer les graphes des applications T^0, T^1, T^2 et dessiner A_0, A_1, A_2.

Dans toute la suite, on fixe $\mu \in \mathrm{P}_c(C)$. On se donne aussi une fonction $\varphi \in \mathscr{C}_c^\infty(\mathbf{R})$ telle que $\int \varphi = 1$ et $\operatorname{supp}\varphi \subset J$. Enfin pour $j \in \mathbf{N}$, on note $\varphi_j(x) = \varphi(T^j(x))$ si $x \in [0,1]$ et $\varphi_j(x) = 0$ si $x \notin [0,1]$.

10. Montrer que pour tout $K > 0$ il existe $C > 0$ telle que

$$|\widehat{\varphi}(2\pi\ell)| \leqslant C\langle \ell\rangle^{-K}, \quad \ell \in \mathbf{Z},$$

et qu'on a $\varphi(x) = \displaystyle\sum_{\ell\in\mathbf{Z}} \widehat{\varphi}(2\pi\ell)\exp 2\pi i\ell x$ pour tout $x \in [0,1]$.

11. En déduire que pour tout j, on a $\varphi_j \in \mathscr{C}_c^\infty(]0,1[)$ et montrer que $\operatorname{supp}\varphi_j \cap C = \emptyset$.

12. Montrer que pour tout j on a $\widehat{\varphi_j}(2\pi 3^j\ell) = \widehat{\varphi}(2\pi\ell)$ pour tout $\ell \in \mathbf{Z}$ et $\widehat{\varphi_j}(2\pi k) = 0$ si 3^j ne divise pas k.

13. Soient $\psi \in \mathscr{C}_c^\infty(]0,1[)$ et $\delta > 0$ tels que $\operatorname{supp}\psi \subset [\delta, 1-\delta]$.

a) Montrer que pour toute fonction $\rho \in \mathscr{C}_c^\infty([-\delta, 1+\delta])$ on a $\int_{\mathbf{R}} \rho(x)\psi(x)\mathrm{d}x = \sum_{\ell\in\mathbf{Z}} \widehat{\rho}(2\pi\ell)\widehat{\psi}(-2\pi\ell)$.

b) En déduire que $\mu(\psi) = \sum_{\ell\in\mathbf{Z}} \widehat{\mu}(2\pi\ell)\widehat{\psi}(-2\pi\ell)$.

14. Déduire des trois questions précédentes que pour tout $j \in \mathbf{N}$ on a

$$1 + \sum_{\ell\neq 0} \widehat{\varphi}(-2\pi\ell)\widehat{\mu}(2\pi 3^j\ell) = 0.$$

15. Montrer que $\limsup_{|\xi|\to\infty} |\widehat{\mu}(\xi)| > 0$ et en déduire que $\dim_{\mathrm{F}} C = 0$.