Corrigé du contrôle continu du 26 février 2024

1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ une fonction appartenant à $L^1(\mathbb{R}^n)$.
   (a) Cf. cours.
   (b) Cf. cours.
   (c) La transformée de Fourier $\widehat{f}(\xi)$ tend vers 0 lorsque $\|\xi\| \to +\infty$ d'après le lemme de Riemann-Lebesgue.

2. Soit la fonction $f : x \in \mathbb{R} \mapsto e^{-x^2} \in \mathbb{R}$.
   On a, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, $\widehat{f}(\xi) = \sqrt{\pi} e^{-\frac{\xi^2}{4}}$; cf. cours / TD.

3. Pour tout $a > 0$, on définit la fonction $f_a : x \in \mathbb{R} \mapsto e^{-a|x|} \in \mathbb{R}$.
   (a) La fonction f_a appartient à $L^1(\mathbb{R})$, étant continue et convergeant exponentiellement vite vers 0 en $\pm\infty$. On a de plus, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$,

$$\widehat{f_a}(\xi) \; = \; \int_{\mathbb{R}^+} e^{-ix\xi} e^{-ax}\, dx + \int_{\mathbb{R}^-} e^{-ix\xi} e^{ax}\, dx \; = \; \frac{1}{i\xi + a} + \frac{1}{-i\xi + a} \; = \; \frac{2a}{\xi^2 + a^2}\,.$$

   (b) Soit $b \in \mathbb{R}^{+*}$. On s'intéresse à l'équation suivante d'inconnue $u \in L^1(\mathbb{R})$:

$$(E) \qquad \text{p.p.t. } x \in \mathbb{R}\,, \quad u(x) \; = \; e^{-|x|} + b \int_{\mathbb{R}} e^{-|x-s|} u(s)\, ds\,.$$

   i. Comme $f_1 \in L^1(\mathbb{R})$, on a $f_1 \star u \in L^1(\mathbb{R})$ pour tout $u \in L^1(\mathbb{R})$ et (E) s'ecrit aussi

$$(E) \qquad u \; = \; f_1 \, + \, b\, f_1 \star u \;\; \text{dans} \;\; L^1(\mathbb{R})\,.$$

   Supposons que $u \in L^1(\mathbb{R})$ soit une solution de (E). Alors $\widehat{u}$ appartient à $\mathcal{C}_{\to 0}(\mathbb{R})$ et vérifie, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \widehat{u}(\xi) \; = \; \widehat{f_1}(\xi) + b\,\widehat{f_1 \star u}(\xi) \; &= \; \widehat{f_1}(\xi) + b\,\widehat{f_1}(\xi)\,\widehat{u}(\xi) \\ &= \; \frac{2}{\xi^2+1} + \frac{2b}{\xi^2+1}\,\widehat{u}(\xi)\,, \end{aligned}$$

$$\text{ssi} \qquad \left(\xi^2 + 1 - 2b\right) \widehat{u}(\xi) \; = \; 2\,. \tag{1}$$

   On en déduit que :

ii. S'il existe une telle solution, alors on a $\xi^2 + 1 - 2b \neq 0$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, et donc $b < \frac{1}{2}$, puisque $\mathrm{Im}\big(\xi \in \mathbb{R} \mapsto \xi^2 \in \mathbb{R}\big) = \mathbb{R}^+$.

iii. Si $u \in L^1(\mathbb{R})$ est solution et $b \in]0, \frac{1}{2}[$, alors $\xi^2 + 1 - 2b > 0$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}$ et u vérifie :

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \widehat{u}(\xi) \ = \ \frac{2}{\xi^2 + 1 - 2b} \ = \ \frac{1}{\sqrt{1-2b}} \widehat{f}_{\sqrt{1-2b}}(\xi)$$

et donc, par injectivité de la transformée de Fourier sur $L^1(\mathbb{R})$,

$$u \ = \ \frac{1}{\sqrt{1-2b}} f_{\sqrt{1-2b}} : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-2b}} e^{-\sqrt{1-2b}\,|x|} \quad \text{presque partout.}$$

Réciproquement, cette fonction u est bien solution de (E) puisqu'elle appartient à $L^1(\mathbb{R})$ et vérifie,

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \widehat{u}(\xi) \ = \ \frac{2}{\xi^2 + 1 - 2b} \underset{\text{cf. (1)}}{=} \widehat{f_1}(\xi) + b\, \widehat{f_1}(\xi)\, \widehat{u}(\xi) \ = \ \mathcal{F}\big(f_1 + b\, f_1 \star u\big)(\xi),$$

d'où, par injectivité de la transformée de Fourier, $u = f_1 + b\, f_1 \star u$ dans $L^1(\mathbb{R})$.