Contrôle continu du 26 février 2024

Durée : une heure.

1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ une fonction appartenant à $L^1(\mathbb{R}^n)$.
   (a) Donner la définition de la transformée de Fourier $\widehat{f}$ de f.
   (b) Montrer que $\widehat{f} \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$.
   (c) Quelle autre propriété remarquable possède $\widehat{f}$?
2. Soit la fonction $f : x \in \mathbb{R} \mapsto e^{-x^2} \in \mathbb{R}$.
   Expliciter $\widehat{f}$ en utilisant une méthode de votre choix vue en cours ou en TD.
   Indication. On rappelle que $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}$.
3. Pour tout $a > 0$, on définit la fonction $f_a : x \in \mathbb{R} \mapsto e^{-a|x|} \in \mathbb{R}$.
   (a) Donner l'expression de $\widehat{f_a}$.
   (b) Soit $b \in \mathbb{R}^{+*}$. On s'intéresse à l'équation suivante d'inconnue $u \in L^1(\mathbb{R})$:

$$(E) \qquad \text{p.p.t. } x \in \mathbb{R}, \quad u(x) = e^{-|x|} + b \int_{\mathbb{R}} e^{-|x-s|} u(s)\, ds\,.$$

   i. Reformuler cette équation à l'aide d'un produit de convolution.
   ii. Montrer qu'il n'y a aucune solution $u \in L^1(\mathbb{R})$ lorsque $b \geq \frac{1}{2}$.
   iii. On suppose que $b \in]0, \frac{1}{2}[$. Démontrer qu'il existe une unique solution que l'on déterminera explicitement.