Nantes Université, 2024
XMS2ME320

Pour toute question :
`yann.chaubet@univ-nantes.fr`

Analyse de Fourier
Corrigé du devoir maison

L'objectif du devoir est de démontrer le résultat suivant.

Théorème (des nombres premiers)**.** *Pour tout $x \in \mathbf{R}$ on note $\pi(x)$ le nombre de nombres premiers inférieurs à x. Alors quand $x \to \infty$ on a l'équivalent*

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}.$$

On rappelle que la fonction ζ de Riemann est définie par

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p \in \mathscr{P}} \left(1 - p^{-s}\right)^{-1}, \qquad s \in \mathbf{C}_{>1}.$$

où $\mathbf{C}_{>1} = \{s \in \mathbf{C} \ : \ \operatorname{Re} s > 1\}$. Ici $\mathscr{P}$ est l'ensemble des nombres premiers. On rappelle aussi que la fonction ζ admet un prolongement méromorphe à tout le plan complexe, avec un unique pôle en $s = 1$, qui est simple avec résidu 1, et qu'on a

$$\zeta(1 + it) \neq 0, \qquad t \in \mathbf{R}^*.$$

Dans toute la suite, on notera pour $\operatorname{Re} s > 1$

$$\kappa(s) = \sum_{p \in \mathscr{P}} \frac{1}{p^s}.$$

On notera log la détermination principale du logarithme complexe, définie par

$$\log\left(re^{i\theta}\right) = \log(r) + i\theta, \quad r > 0, \quad \theta \in \left]-\pi, \pi\right[.$$

La fonction $\log : \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}_- \to \mathbf{C}$ ainsi définie est holomorphe sur $\mathbf{C} \setminus \mathbf{R}_-$ et on a le développement

$$-\log(1 - z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}, \qquad |z| < 1.$$

On pose en outre

$$\nu(s) = -\sum_{p \in \mathscr{P}} \log\left(1 - p^{-s}\right)$$

dès que $\operatorname{Re} s > 1$, de sorte que $\exp \nu(s) = \zeta(s)$ et que $\nu(\sigma) = \log \zeta(\sigma)$ si $\sigma > 1$.

I. Préliminaires

On pose $g(s) = \nu(s) - \kappa(s)$ pour $\operatorname{Re} s > 1$.

1. Montrer que pour tout $r \in]0,1[$ il existe $C > 0$ telle que

$$|-\log(1-z) - z| \leqslant C|z|^2, \qquad |z| \leqslant r.$$

Solution. Pour tout $|z| < 1$ on a $-\log(1-z) - z = z^2 f(z)$ où

$$f(z) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{z^{n-2}}{n}.$$

Notons que f est la fonction somme d'une série entière de rayon de convergence égal à 1. En particulier, pour tout $r \in]0,1[$, f est continue — donc bornée — sur $\overline{D}(0,r)$. On en déduit l'inégalité voulue avec $C = \sup_{D(0,r)} |f|$.

2. En déduire qu'il existe $C > 0$ telle que pour tout $s \in \mathbf{C}$ avec $\sigma = \operatorname{Re} s > 1/2$, on a

$$\left|-\log\left(1 - p^{-s}\right) - p^{-s}\right| \leqslant C p^{-2\sigma}, \qquad p \in \mathscr{P}.$$

Solution. Pour tout $p \in \mathscr{P}$ et $s \in \mathbf{C}_{>1/2}$ on a $|p^{-s}| \leqslant 2^{-1/2} < 1$. Il suffit alors d'appliquer le résultat de la question précédente avec $r = 2^{-1/2}$.

3. En déduire que la fonction g s'étend en une fonction holomorphe sur le demi-plan $\{s \in \mathbf{C} \ : \ \operatorname{Re} s > 1/2\}$.

Solution. Soit $\sigma > 1/2$. Pour $p \in \mathscr{P}$ et $s \in \mathbb{C}_{>1/2}$ on note $g_p(s) = -\log(1-p^{-s}) - p^{-s}$. Par la question précédente on a

$$|g_p(s)| \leqslant p^{-2\sigma}, \quad p \in \mathscr{P}, \quad \operatorname{Re} s \geqslant \sigma.$$

Il suit que la série de fonctions $\sum_p g_p$ converge normalement, donc uniformément, sur $\mathbb{C}_{\geqslant\sigma}$. Comme chaque g_p est holomorphe sur $\mathbb{C}_{>\sigma}$ il suit que la fonction somme $\tilde{g} = \sum_{p \in \mathscr{P}} g_p$ l'est aussi. Ceci étant vrai pour tout $\sigma > 1/2$, on obtient que $\tilde{g}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}_{>1/2}$. Or $\tilde{g}$ coïncide avec g sur $\mathbb{C}_{>1}$, ce qui conclut.

4. Soit $t_0 \in \mathbf{R}^*$ et $s_0 = 1 + it_0$. Comme $\zeta(1+it_0) \neq 0$, il existe un disque D_0, centré en s_0 et de rayon strictement inférieur à $1/2$, sur lequel ζ ne s'annule pas et on *admet* qu'on choisir $\nu_0 : D_0 \to \mathbf{C}$ holomorphe telle que $\exp \circ \nu_0 = \zeta$ sur D_0.

(i) Montrer qu'il existe $k \in \mathbf{Z}$ tel que $\nu_0 = \nu + 2\pi i k$ sur $D_0 \cap \mathbf{C}_{>1}$.

Solution. On a $\exp(\nu_0) = \zeta = \exp(\nu)$ et donc $\exp(\nu - \nu_0) = 1$ sur $D_0 \cap \mathbb{C}_{>1}$. En particulier $\nu - \nu_0$ est à valeurs dans $2\pi i\mathbb{Z}$. Or elle est continue, donc constante égale à $2\pi i k$ pour un $k \in \mathbb{Z}$ car $D_0 \cap \mathbb{C}_{>1}$ est connexe.

(ii) En déduire que κ a un prolongement holomorphe à $D_0 \cup \mathbf{C}_{>1}$.

*Solution. On a $\kappa = \nu - g$. La question précédente montre que ν s'étend analytiquement à $D_0 \cup \mathbb{C}_{>1}$. Comme $D_0 \subset \mathbb{C}_{>1/2}$ c'est aussi le cas pour g par la question **3**. Il suit que κ s'étend analytiquement à $\mathbb{C}_{>1/2}$.*

5. On note $h : s \mapsto (s-1)\zeta(s)$.

(i) Montrer que la fonction h admet un prolongement analytique à $\mathbf{C}$ tel que $h(1) = 1$.

Solution. C'est une conséquence immédiate du fait que ζ a un unique pôle simple avec résidu 1 en $s = 1$.

Soit D_0 un disque centré en 1 et de rayon strictement inférieur à $1/2$ sur lequel h ne s'annule pas, et $\nu_0 : D_0 \to \mathbf{C}$ holomorphe telle que $\exp \circ \nu_0 = h$.

(ii) Montrer qu'il existe $k \in \mathbf{Z}$ tel que $\nu_0(s) = \log(s-1) + \nu(s) + 2\pi i k$ pour tout $s \in \mathbf{C}_{>1} \cap D_0$.

Solution. On remarque simplement que $\exp \nu_0(s) = h(s) = \exp(\nu(s) + \log(s-1))$ pour tout $s \in \mathbb{C}_{>1} \cap D_0$ et on applique le même raisonnement qu'à la question **4.**(i).

(iii) Montrer que $\kappa(s) + \log(s-1)$ admet un prolongement holomorphe à $D_0 \cup \mathbf{C}_{>1}$.

Solution. On écrit $\kappa(s) + \log(s-1) = \nu(s) + \log(s-1) - g(s)$. La fonction g s'étend analytiquement à $\mathbf{C}_{>1/2} \supset D_0 \cap \mathbf{C}_{>1}$ et la question précédente montre que la fonction $s \mapsto \nu(s) + \log(s-1)$ s'étend à $D_0 \cap \mathbf{C}_{>1}$. Il en est donc de même pour κ.

6. Déduire des questions **4.** et **5.** que la fonction $\Phi : s \mapsto \kappa(s) + \log(s-1)$ admet un prolongement holomorphe à un voisinage ouvert du demi-plan $\{s \in \mathbf{C} \ : \ \operatorname{Re} s \geqslant 1\}$. En déduire que la fonction $\ell : \mathbf{R}^* \to \mathbf{C}$ donnée par

$$\ell(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \kappa(1 + \varepsilon + it)$$

est bien définie et que $t \mapsto \ell(t) - \log \dfrac{1}{it}$ s'étend à une fonction $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$.

Solution. Il suit des questions **4.** *et* **5.** *que pour tout $t \in \mathbf{R}$ il existe un disque D_t centré en $1 + it$ tel que Φ a un prolongement analytique à $D_t \cup \mathbb{C}_{>1}$, noté Φ_t. Si $t, t' \in \mathbf{R}$ et $s \in D_t \cap D_{t'}$, on a $\Phi_t(s) = \Phi_{t'}(s)$ par unicité du prolongement analytique puisque Φ_t et $\Phi_{t'}$ coïncident sur $\mathbf{C}_{>1}$, donc sur $\mathbf{C}_{>1} \cup (D_t \cap D_{t'})$, qui est connexe. Alors l'ouvert*

$$\Omega = \mathbf{C}_{>1} \cup \left(\bigcup_{t \in \mathbf{R}} D_t \right)$$

est un voisinage de $\mathbf{C}_{\geqslant 1}$ et l'application $\tilde{\Phi} : \Omega \to \mathbb{C}$ donnée par $\tilde{\Phi}(s) = \Phi(s)$ si $s \in \mathbb{C}_{>1}$ et $\tilde{\Phi}(s) = \Phi_t(s)$ si $s \in D_t$ avec $t \in \mathbf{R}$, est bien définie. Elle coïncide avec une fonction analytique au voisinage de tout point de Ω, donc est analytique. Enfin pour $t \in \mathbf{R}^*$ on a $\ell(t) = \tilde{\Phi}(1 + it)$. Comme $\tilde{\Phi}$ est analytique sur Ω, la restriction $\tilde{\Phi}|_{1+i\mathbf{R}}$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$, ce qui conclut.

II. Une mesure de comptage

Pour tout $x \in \mathbf{R}$ on note $\delta_x \in \mathscr{S}'(\mathbf{R})$ la distribution donnée par $\langle \delta_x, \varphi \rangle = \varphi(x)$ pour tout $\varphi \in \mathscr{S}$. On note

$$u = \sum_{p \in \mathscr{P}} \frac{1}{p} \delta_{\log p}.$$

7. On rappelle que pour tout $\alpha > 1$, on a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \log(n)^{\alpha}} < +\infty.$$

En déduire que u est bien une distribution tempérée sur $\mathbf{R}$.

Solution. Pour tout $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbf{R})$, on a

$$|\varphi(t)| \leqslant p_2(\varphi)|t|^{-2}, \quad x \in \mathbf{R}^*,$$

où $p_2(\varphi) = \sum_{0\leqslant k,m\leqslant 2} \sup_t |t^k \partial^m \varphi(t)|$. En particulier pour tout $p \in \mathscr{P}$ on a

$$\frac{|\varphi(\log p)|}{p} \leqslant \frac{1}{p \log(p)^2}.$$

Comme la série $\sum_p p^{-1} \log(p)^{-2}$ converge, il suit que l'application $u : \varphi \mapsto \sum_{p\in\mathscr{P}} p^{-1}\varphi(p)$ est bien définie. Elle est bien sûr linéaire et on a

$$|\langle u, \varphi\rangle| \leqslant C p_2(\varphi), \quad \varphi \in \mathscr{S}(\mathbf{R}),$$

où $C = \sum_{p\in\mathscr{P}} p^{-1} \log(p)^{-2}$. Ainsi u définit bien une distribution tempérée.

Pour tout $\varepsilon > 0$ on note $u_\varepsilon = \displaystyle\sum_{p\in\mathscr{P}} \frac{1}{p^{1+\varepsilon}} \delta_{\log p}$.

8. Montrer que $u_\varepsilon \to u$ dans $\mathscr{S}'(\mathbf{R})$ quand $\varepsilon \to 0$.

Solution. Soit $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbf{R})$. On montre comme à la question précédente que pour tout $\varepsilon > 0$ on a $u_\varepsilon \in \mathscr{S}'$ et$|\langle u_\varepsilon, \varphi\rangle| \leqslant C p_2(\varphi)$ avec $C = \sum_{p\in\mathscr{P}} p^{-1} \log(p)^{-2}$. Pour tous $\varepsilon > 0$ et $p \in \mathscr{P}$ on note $f_p(\varepsilon) = p^{-1-\varepsilon}\varphi(p)$. Puisque $f_\varepsilon(p) \leqslant p_2(\varphi)p^{-1}\log(p)^{-2}$, la série de fonctions $\sum_p f_p$ converge normalement sur $\mathbf{R}_+$. Il suit que la fonction somme F est continue sur $\mathbf{R}_+$ et on a

$$\langle u_\varepsilon, \varphi\rangle = F(\varepsilon) \to F(0) = \langle u, \varphi\rangle$$

quand $\varepsilon \to 0$. On a bien montré $u_\varepsilon \to u$ dans $\mathscr{S}'(\mathbf{R})$.

9. Montrer que $\widehat{u}_\varepsilon = \ell_\varepsilon$ dans $\mathscr{S}'(\mathbf{R})$, où on a noté

$$\ell_\varepsilon(t) = \kappa(1 + \varepsilon + it), \qquad t \in \mathbf{R}.$$

Solution. Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $|\kappa(1 + \varepsilon + it)| \leqslant \kappa(1 + \varepsilon)$ on a $\ell_\varepsilon \in L^\infty$, donc $\ell_\varepsilon \in \mathscr{S}'(\mathbf{R})$. Soit $\varphi \in \mathscr{S}$. On a

$$\langle \widehat{u}_\varepsilon, \varphi\rangle = \langle u_\varepsilon, \widehat{\varphi}\rangle = \sum_{p\in\mathscr{P}} \frac{\widehat{\varphi}(\log p)}{p^{1+\varepsilon}} = \sum_{p\in\mathscr{P}} p^{-1-\varepsilon} \int \varphi(t) e^{-it\log p} \mathrm{d}t.$$

Puisque $\sum_{p\in\mathscr{P}} p^{-1-\varepsilon} \int |\varphi(t)e^{-it\log p}| \mathrm{d}t \leqslant \|\varphi\|_{L^1} \sum_p p^{-1-\varepsilon} < \infty$ on peut intervertir somme et intégrale pour obtenir

$$\langle \widehat{u}_\varepsilon, \varphi\rangle = \int \varphi(t) \left(\sum_{p\in\mathscr{P}} p^{-1-\varepsilon-it} \right) \mathrm{d}t = \int \varphi(t)\kappa(1 + \varepsilon + it)\mathrm{d}t.$$

Il suit que $\widehat{u}_\varepsilon = \ell_\varepsilon$ au sens des distributions.

10. Déduire de la question **6.**, que pour tout compact $K \subset \mathbf{R}$, il existe $C > 0$ telle que pour tout $\varepsilon > 0$ petit et tout $t \in K \setminus \{0\}$, on a la majoration

$$|\ell_\varepsilon(t)| \ \leqslant C + |\log|t||.$$

Indication. On pourra écrire $\ell_\varepsilon(t) = \Phi(1+\varepsilon+it) - \log(\varepsilon+it)$ *où* Φ *est définie dans la question* ***6.***

Solution. Soit $K \subset \mathbf{R}$ *un compact. On écrit* $\ell_\varepsilon(t) = \Phi(1+\varepsilon+it) - \log(\varepsilon+it)$*. La fonction* Φ *est analytique sur un voisinage ouvert de* $\mathbb{C}_{\geqslant 1}$*. En particulier, elle est continue sur le compact* $\tilde{K} = \{s \in \mathbb{C} \ : \ \mathrm{Re}\, s \in [1,2] \text{ et } \mathrm{Im}\, s \in K\}$*, donc y bornée. Il suit qu'il existe* $C_1 > 0$ *telle que*

$$|\Phi(1+\varepsilon+it)| \leqslant C_1, \quad \varepsilon \in [0,1], \quad t \in K.$$

Pour le terme logarithmique, on écrit pour tous $\varepsilon > 0$ *et* $t \in \mathbf{R}$*,*

$$|\log(\varepsilon+it)| \ \leqslant |\log|\varepsilon+it|| + |\arg(\varepsilon+it)| \leqslant \left|\log\sqrt{\varepsilon^2+t^2}\right| + \pi/2.$$

Soit $t \in \mathbf{R}^*$*. Si* $\varepsilon^2+t^2 \leqslant 1$ *alors* $\left|\log\sqrt{\varepsilon^2+t^2}\right| = -\log\sqrt{\varepsilon^2+t^2} \leqslant -\log|t| = |\log|t||$*. D'autre part si* $\varepsilon^2+t^2 \geqslant 1$ *et* $\varepsilon < 1$ *alors* $\varepsilon^2 \leqslant t^2\varepsilon^2/(1-\varepsilon^2)$ *et*

$$1 \leqslant \sqrt{t^2+\varepsilon^2} \leqslant |t|\left(1+\frac{\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2}\right)^{1/2}.$$

Ceci donne $0 \leqslant \log\sqrt{\varepsilon^2+t^2} \leqslant C_\varepsilon + \log|t| \leqslant C_\varepsilon + |\log|t||$ *avec* $C_\varepsilon = \log\left(1+\frac{\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2}\right)^{1/2}$*. La fonction* $\varepsilon \mapsto C_\varepsilon$ *est décroissante et on obtient*

$$|\ell_\varepsilon(t)| \leqslant C_1 + \pi/2 + C_{1/2} + |\log|t||, \quad \varepsilon \in \left]0,1/2\right], \quad t \in \mathbf{R}^*,$$

ce qui est l'inégalité voulue avec $C = C_1 + \pi/2 + C_{1/2}$*.*

11. En déduire que pour toute fonction $\varphi \in \mathscr{C}_c^\infty(\mathbf{R})$ on a

$$\sum_{p\in\mathscr{P}} \frac{\widehat{\varphi}(\log p)}{p} = \int_{\mathbf{R}} \varphi(t)\ell(t)\mathrm{d}t.$$

Solution. Soit $\varphi \in \mathscr{C}_c^\infty(\mathbf{R})$*. La question* ***8*** *donne* $u_\varepsilon \to u$ *dans* $\mathscr{S}'(\mathbf{R})$*. Comme* $\mathscr{F} : \mathscr{S} \to \mathscr{S}$ *est continue, on a* $\widehat{u}_\varepsilon \to \widehat{u}$ *dans* $\mathscr{S}'(\mathbf{R})$ *d'où*

$$\langle \widehat{u}_\varepsilon, \varphi\rangle \to \langle u, \varphi\rangle = \sum_{p\in\mathscr{P}} \frac{\widehat{\varphi}(\log p)}{p} \tag{1}$$

quand $\varepsilon \to 0$*. D'un autre côté on a* $\langle \widehat{u}_\varepsilon, \varphi\rangle = \int \ell_\varepsilon(t)\varphi(t)\mathrm{d}t$ *pour tout* $\varepsilon > 0$ *par la question* ***9****. Comme* $K = \mathrm{supp}(\varphi)$ *est compact, la question précédente donne l'existence d'une constance* $C > 0$ *telle que*

$$|\ell_\varepsilon(t)| \leqslant C + |\log|t||, \quad t \in K \setminus \{0\}.$$

Il suit que $|\ell_\varepsilon(t)\varphi(t)| \leqslant \|\varphi\|_\infty(C + |\log|t||)$ *pour tout* $t \in \mathbf{R}^*$*. Comme* $t \mapsto C + |\log|t||$ *est intégrable sur* $\mathbf{R}^*$*, on obtient par convergence dominée*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\langle \widehat{u}_\varepsilon, \varphi\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0} \int \ell_\varepsilon(t)\varphi(t)\mathrm{d}t = \int \varphi(t)\ell(t)\mathrm{d}t.$$

En combinant cette égalité avec (2) *on obtient la formule demandée.*

III. Une version régularisée du théorème

Dans ce qui suit on note $f_0 : t \mapsto (1+it)^{-1}$ et $A : x \mapsto e^{-x}\pi(e^x)$.

12. Montrer que $f_0 \in L^2(\mathbf{R})$ et que pour presque tout $\lambda \in \mathbf{R}$ on a

$$\widehat{f_0}(\lambda) = 2\pi 1_{\mathbf{R}_-}(\lambda) e^{\lambda}.$$

Solution. On a $|f_0(t)|^2 = (1+t^2)^{-1}$ donc $f_0 \in L^2(\mathbf{R})$. Notons $g : \lambda \mapsto 2\ \pi 1_{\mathbf{R}_-}(\lambda)e^{\lambda}$. Alors $g \in L^1(\mathbf{R})$; on calcule

$$\widehat{g}(t) = \int g(\lambda)e^{-i\lambda t}\mathrm{d}\lambda = 2\pi \int_{-\infty}^{0} e^{\lambda(1+it)}\mathrm{d}t = \frac{2\pi}{1-it} = 2\pi f_0(-t).$$

Ainsi $\mathscr{F}g = 2\pi J f_0$ où J est l'opérateur $f \mapsto f(-\cdot)$, qui agit sur L^2. On a $J\mathscr{F} = \mathscr{F}J$ et $\mathscr{F}^{-1} = (2\pi)^{-1}J\mathscr{F}$, d'où

$$\mathscr{F}f_0 = \mathscr{F}J^2 f_0 = 2\pi\mathscr{F}J\mathscr{F}g = g.$$

Cette égalité a lieu dans $L^2(\mathbf{R})$, donc elle est vraie presque partout.

13. Montrer que pour toute fonction $\varphi \in \mathscr{C}_c^\infty(\mathbf{R})$ et tout $p \in \mathscr{P}$ on a

$$\widehat{f_0\varphi}(\log p) = \frac{1}{2\pi}(\widehat{f_0} \star \widehat{\varphi})(\log p) = p\int_{\mathbf{R}} \widehat{\varphi}(\lambda)e^{-\lambda}1_{[\log p, +\infty[}(\lambda)\mathrm{d}\lambda$$

Solution. Pour toutes fonctions $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathscr{S}$ on calcule

$$\widehat{\varphi}_1 \star \widehat{\varphi}_2(\lambda) = \int \widehat{\varphi}(\lambda - \sigma)\widehat{\varphi}_2(\sigma)\mathrm{d}\sigma = \int \left(\int \varphi_1(t)e^{-it(\lambda-\sigma)}\mathrm{d}t\right)\widehat{\varphi}_2(\sigma)\mathrm{d}\sigma.$$

Comme les fonctions considérées sont dans la classe de Schwartz on peut intervertir les intégrales pour obtenir

$$\widehat{\varphi}_1\star\widehat{\varphi}_2(\lambda) = \int \varphi_1(t)\left(\int \widehat{\varphi_2}(\sigma)e^{-it(\lambda-\sigma)}\mathrm{d}\sigma\right)\mathrm{d}t = 2\pi\int \varphi_1(t)\varphi_2(t)e^{-it\lambda}\mathrm{d}t = 2\pi\widehat{\varphi_1\varphi_2}(\lambda),$$

où la deuxième égalité vient de la formule d'inversion de Fourier. On a obtenu $\widehat{\varphi_1\varphi_2} = (2\pi)^{-1}\widehat{\varphi_1} \star \widehat{\varphi_2}$. Par densité de $\mathscr{S}(\mathbf{R})$ dans $L^2(\mathbf{R})$ et par continuité de l'application $f \mapsto f \star \varphi_2$ en tant qu'application $L^2(\mathbf{R}) \to L^2(\mathbf{R})$ on obtient bien

$$\widehat{f_0\varphi} = \frac{1}{2\pi}\widehat{f_0} \star \widehat{\varphi} \quad \textit{dans } L^2(\mathbf{R}).$$

*Cependant $\widehat{f_0\varphi}$ et $(2\pi)^{-1}\widehat{f_0}\star\widehat{\varphi}$ sont continues, donc l'égalité a lieu au point $\lambda = \log p$ pour tout $p \in \mathscr{P}$. Puisque $\widehat{f_0} \in L^1(\mathbf{R})$ on peut calculer à l'aide de la question **12***

$$\frac{1}{2\pi}\left(\widehat{f_0} \star \widehat{\varphi}\right)(\log p) = \int 1_{\mathbf{R}_-}(\log p - \lambda)e^{\log p - \lambda}\widehat{\varphi}(\lambda)\mathrm{d}\lambda = p\int 1_{[\log p, \infty[}(\lambda)\widehat{\varphi}(\lambda)e^{-\lambda}\mathrm{d}\lambda$$

puisque $1_{\mathbf{R}_-}(\log p - \lambda) = 1_{[\log p, \infty[}(\lambda)$. C'est bien l'égalité voulue.

14. Montrer que $A \in L^\infty(\mathbf{R})$ et qu'on a

$$\int_{\mathbf{R}} \widehat{\varphi}(\lambda)A(\lambda)\mathrm{d}\lambda = \int_{\mathbf{R}} \varphi(t)\frac{\ell(t)}{1+it}\mathrm{d}t, \qquad \varphi \in \mathscr{C}_c^\infty(\mathbf{R}).$$

Indication. Appliquer la question ***11.*** *avec* $\phi = f_0\varphi$.

Solution. Soit $\varphi \in \mathscr{C}_c^\infty(\mathbf{R})$. *La question* ***11*** *appliquée avec* $\phi = f_0\varphi$ *nous donne*

$$\int_{\mathbf{R}} \varphi(t)\frac{\ell(t)}{1+it}\mathrm{d}t = \sum_{p\in\mathscr{P}} \frac{\widehat{f_0\varphi}(\log p)}{p} = \sum_{p\in\mathscr{P}} \int 1_{[\log p,\infty[}(\lambda)\widehat{\varphi}(\lambda)e^{-\lambda}\mathrm{d}\lambda.$$

Notons à présent que

$$\sum_{p\in\mathscr{P}} \int \left|1_{[\log p,\infty[}(\lambda)\widehat{\varphi}(\lambda)\right| \,\mathrm{d}\lambda = \sum_{p\in\mathscr{P}} \int_{\log p}^\infty |\widehat{\varphi}(\lambda)e^{-\lambda}|\mathrm{d}\lambda \leqslant \sum_{p\in\mathscr{P}} \frac{\sup_{[\log p,\infty[}|\widehat{\varphi}|}{p} < \infty,$$

où la dernière somme est finie car $\sup_{[\log p,\infty[}|\widehat{\varphi}| \leqslant p_2(\varphi)\log(p)^{-2}$. *Ceci nous permet d'intervertir la somme et l'intégrale, pour obtenir*

$$\int_{\mathbf{R}} \varphi(t)\frac{\ell(t)}{1+it}\mathrm{d}t = \int \widehat{\varphi}(\lambda)e^{-\lambda}\sum_{p\in\mathscr{P}} 1_{[\log p,\infty[}(\lambda)\mathrm{d}\lambda.$$

En remarquant que $\sum_{p\in\mathscr{P}} 1_{[\log p,\infty[}(\lambda) = \pi(e^\lambda)$, *on obtient l'identité désirée.*

On se donne maintenant une fonction paire $\varphi \in \mathscr{C}_c^\infty(\mathbf{R})$ et on pose $\psi = \widehat{\varphi}$.

15. Montrer que ψ est paire et que pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$, on a

$$(\psi \star A)(\lambda) = \int_{\mathbf{R}} \frac{\ell(t)}{1+it}\varphi(t)e^{it\lambda}\mathrm{d}t.$$

Solution. Comme φ *est paire on a* $J\varphi = \varphi$. *Dès lors* $J\psi = J\mathscr{F}\varphi = \mathscr{F}J\varphi = \mathscr{F}\varphi = \psi$, *donc* ψ *est paire. Posons* $\varphi_\lambda(t) = \varphi(t)e^{i\lambda t}$ *pour* $t \in \mathbf{R}$. *Alors* $\widehat{\varphi_\lambda}(\sigma) = \varphi(\sigma - \lambda)$ *pour* $\sigma \in \mathbf{R}$. *La question précédente appliquée à* φ_λ *donne alors*

$$\int_{\mathbf{R}} \frac{\ell(t)}{1+it}\varphi(t)e^{it\lambda}\mathrm{d}t = \int \widehat{\varphi_\lambda}(\sigma)A(\sigma)\mathrm{d}\sigma = \int \widehat{\varphi}(\sigma-\lambda)A(\sigma)\mathrm{d}\sigma = (\psi \star A)(\lambda).$$

16. En utilisant la question **6**, montrer que pour tout $N \in \mathbf{N}$, il existe une constante $C_N > 0$ telle que

$$\left|\int_{\mathbf{R}} \left(\ell(t) - \log\frac{1}{it}\right)\frac{\varphi(t)}{1+it}e^{it\lambda}\mathrm{d}t\right| \leqslant C_N\langle\lambda\rangle^{-N}, \qquad \lambda \in \mathbf{R},$$

où $\langle\lambda\rangle = \sqrt{1+\lambda^2}$.

Solution. Par la question ***6****, il existe* $\phi \in \mathscr{C}^\infty(\mathbf{R})$ *telle que* $\phi(t) = \ell(t) - \log\frac{1}{it}$ *pour tout* $t \in \mathbf{R}^*$. *Ainsi*

$$\int_{\mathbf{R}} \left(\ell(t) - \log\frac{1}{it}\right)\frac{\varphi(t)}{1+it}e^{it\lambda}\mathrm{d}t = \int \frac{\phi(t)\varphi(t)}{1+it}e^{it\lambda}\mathrm{d}t = \widehat{\phi f_0\varphi}(\lambda).$$

Comme f_0 *est lisse et* $\varphi \in \mathscr{C}_c^\infty(\mathbf{R})$, *on obtient* $\phi f_0\varphi \in \mathscr{C}_c^\infty(\mathbf{R}) \subset \mathscr{S}$ *donc* $\widehat{\phi f_0\varphi} \in \mathscr{S}$ *et la conclusion suit immédiatement.*

17. On rappelle que pour toute fonction $f \in \mathscr{S}(\mathbf{R})$, on a, quand $\lambda \to \infty$,

$$\int_{\mathbf{R}} \log \frac{1}{it} f(t) e^{it\lambda} \mathrm{d}t = \frac{2\pi f(0)}{\lambda} + o(\lambda^{-1}).$$

En déduire que $(\psi \star A)(\lambda) = \dfrac{2\pi\varphi(0)}{\lambda} + o(\lambda^{-1})$ quand $\lambda \to \infty$.

Solution. On écrit

$$(\psi \star A)(\lambda) = \int \frac{\varphi(t)e^{it\lambda}}{1+it} \log \frac{1}{it} \mathrm{d}t + \int \frac{\varphi(t)e^{it\lambda}}{1+it} \left(\ell(t) - \log \frac{1}{it}\right) \mathrm{d}t.$$

Notons $I_1(\lambda)$ et $I_2(\lambda)$ les deux intégrales de l'égalité ci-dessus. Par la question précédente on a

$$I_2(\lambda) = \mathcal{O}(\langle \lambda \rangle^{-2}) = o_{\lambda\to\infty}(\lambda^{-1}).$$

Par ailleurs par l'estimée donnée dans l'énoncé appliquée à $f = f_0\varphi$, on obtient

$$I_1(\lambda) = \frac{2\pi f_0(0)\varphi(0)}{\lambda} + o_{\lambda\to\infty}(\lambda^{-1})$$

quand $\lambda \to \infty$. Mais $f_0(0) = 1$ et en combinant les deux estimées précédentes on obtient bien $(\psi \star A)(\lambda) = I_1(\lambda) + I_2(\lambda) = 2\pi\varphi(0)/\lambda + o_{\lambda\to\infty}(\lambda^{-1})$.

IV. Approximation de l'identité

18. Montrer qu'on peut choisir la fonction paire φ de sorte que

$$\varphi(0) = \frac{1}{2\pi}, \quad \psi = \widehat{\varphi} \geqslant 0 \quad \text{et} \quad \int_{\mathbf{R}} \psi(\lambda)\mathrm{d}\lambda = 1.$$

Solution. Soit $\varphi_1 \in \mathscr{C}_c^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R}_+)$ une fonction paire telle que $\varphi_1(0) > 0$. On a

$$(\varphi_1 \star \varphi_1)(0) = \int \varphi(s)\varphi(-s)\mathrm{d}s = \int \varphi^2(s)\mathrm{d}s > 0.$$

On pose $\varphi = \dfrac{1}{2\pi}\left(\int \varphi^2\right)^{-1} \varphi_1 \star \varphi_1$. Alors $\varphi(0) = (2\pi)^{-1}$ et de plus $\psi = \widehat{\varphi} = \widehat{\varphi_1}^2 \geqslant 0$. Enfin

$$\int \psi(\lambda)\mathrm{d}\lambda = 2\pi\varphi(0) = 1,$$

donc φ vérifie les conditions demandées.

On se donne de telles fonctions φ et ψ et pour tout $\varepsilon > 0$ on pose

$$\psi_\varepsilon(\lambda) = \varepsilon^{-1}\psi(\lambda/\varepsilon), \qquad t \in \mathbf{R}.$$

19. (i) Montrer que pour tout $\delta > 0$ il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$\int_{-\delta}^{\delta} \psi_\varepsilon(\lambda)\mathrm{d}\lambda \geqslant (1-\delta).$$

Solution. Soit $\delta > 0$. Un changement de variables donne

$$\varepsilon^{-1}\int_{-\delta}^{\delta} \psi(\lambda/\varepsilon)\mathrm{d}\lambda = \int_{-\delta/\varepsilon}^{\delta/\varepsilon} \psi(\lambda)\mathrm{d}\lambda \to \int \psi(\lambda)\mathrm{d}\lambda = 1$$

quand $\varepsilon \to 0$. En particulier si ε est assez petit le terme de gauche est minoré par $1-\delta$.

(ii) En déduire que pour tout $\delta > 0$ il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$(\psi_\varepsilon \star A)(\lambda) \geqslant (1-\delta)\pi(e^{\lambda-\delta})e^{-\lambda-\delta}, \qquad \lambda \in \mathbf{R}.$$

Solution. Soit $\delta > 0$. On écrit

$$(\psi_\varepsilon \star A)(\lambda) = \int \psi_\varepsilon(\sigma)A(\lambda-\sigma)\mathrm{d}\sigma \geqslant \int_{-\delta}^{\delta} \psi_\varepsilon(\sigma)A(\lambda-\sigma)\mathrm{d}\sigma.$$

Pour tout $\sigma \in [-\delta, \delta]$ on a

$$A(\lambda-\sigma) = \frac{\pi(e^{\lambda-\sigma})}{e^{\lambda-\sigma}} \geqslant \frac{\pi(e^{\lambda-\delta})}{e^{\lambda+\delta}}$$

par croissance de π. Si ε est choisi comme dans la question précédente on en déduit

$$\int_{-\delta}^{\delta} \psi_\varepsilon(\sigma)A(\lambda-\sigma)\mathrm{d}\sigma \geqslant \pi(e^{\lambda-\delta})e^{-\lambda-\delta}\int_{-\delta}^{\delta}\psi_\varepsilon \geqslant (1-\delta)\pi(e^{\lambda-\delta})e^{-\lambda-\delta},$$

ce qui conclut.

(iii) En utilisant la question **17.**, montrer que

$$\limsup_{\lambda\to\infty} \frac{\pi(e^\lambda)}{e^\lambda}\lambda \leqslant 1.$$

*Solution. Soit $\delta > 0$. Soit $\varepsilon > 0$ comme dans la question précédente. Notons que si $\varphi(t) = \varphi(\varepsilon t)$ alors $\widehat{\varphi_\varepsilon} = \psi_\varepsilon$ et $\varphi_\varepsilon(0) = \varphi(0) = (2\pi)^{-1}$. En particulier la question **17** donne*

$$(\psi_\varepsilon \star A)(\lambda) = \frac{1}{\lambda} + o_{\lambda\to\infty}(\lambda^{-1}).$$

On obtient $\lambda \cdot (\psi \star A)(\lambda) \to 1$ quand $\lambda \to \infty$, d'où l'on tire

$$(1-\delta)\limsup_{\lambda} \frac{\lambda\pi(e^{\lambda-\delta})}{e^{\lambda+\delta}} \leqslant \limsup_{\lambda} \lambda\cdot(\psi_\varepsilon \star A)(\lambda) = 1.$$

Or on a

$$\limsup_{\lambda} \frac{\lambda\pi(e^{\lambda-\delta})}{e^{\lambda+\delta}} = e^{-2\delta}\limsup_{\lambda}\frac{\lambda}{\lambda-\delta}\frac{(\lambda-\delta)\pi(e^{\lambda-\delta})}{e^{\lambda-\delta}} = e^{-2\delta}\limsup_{\lambda}\frac{\lambda\pi(e^\lambda)}{e^\lambda},$$

ce qui donne finalement

$$\limsup_{\lambda}\frac{\lambda\pi(e^\lambda)}{e^\lambda} \leqslant \frac{e^{2\delta}}{1-\delta}.$$

Comme $\delta > 0$ est arbitraire, on obtient la conclusion souhaitée.

20. (i) En utilisant la question précédente, montrer qu'il existe $M > 0$ tel que

$$\frac{\pi(e^\lambda)}{e^\lambda} \leqslant \frac{M}{1+\lambda}, \qquad \lambda \geqslant 0.$$

Solution. Par la question précédente, il existe $\lambda_0 > 0$ tel que pour tout $\lambda \geqslant \lambda_0$

on a $A(\lambda) \leqslant 2/\lambda$. *On obtient pour tout* $\lambda \geqslant \lambda_0$

$$A(\lambda) \leqslant \frac{2}{\lambda} = \frac{2(1+\lambda^{-1})}{1+\lambda} \leqslant \frac{M_1}{1+\lambda}$$

avec $M_1 = (1+\lambda_0^{-1})$. *D'autre part pour tout* $\lambda \in [0, \lambda_0]$ *on a*

$$A(\lambda) \leqslant \frac{A(\lambda_0)(1+\lambda_0)}{1+\lambda}$$

et on obtient l'inégalité voulue avec $M = \max(M_1, A(\lambda_0)(1+\lambda_0))$.

(ii) En déduire que pour tout $\delta > 0$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $\lambda > \delta$ on a

$$\int_{|\sigma-\lambda|>\delta} \psi_\varepsilon(\lambda-\sigma)A(\sigma)\mathrm{d}\sigma \leqslant \frac{2M\delta}{\lambda} \quad \text{et} \quad \int_{|\sigma-\lambda|\leqslant\delta} \psi_\varepsilon(\lambda-\sigma)A(\sigma)\mathrm{d}\sigma \leqslant \frac{\pi(e^{\lambda+\delta})}{e^{\lambda-\delta}}.$$

Solution. Soit $\delta \in]0,1[$. *Pour* $\varepsilon > 0$ *on a*

$$\int_{|\sigma-\lambda|>\delta} \psi_\varepsilon(\lambda-\sigma)A(\sigma)\mathrm{d}\sigma = \int_{-\infty}^{\lambda-\delta} \psi_\varepsilon(\lambda-\sigma)A(\sigma)\mathrm{d}\sigma + \int_{\lambda+\delta}^{\infty} \psi_\varepsilon(\lambda-\sigma)A(\sigma)\mathrm{d}\sigma.$$

Par la question précédente, on a pour la seconde intégrale

$$\int_{\lambda+\delta}^{\infty} \psi_\varepsilon(\lambda-\sigma)A(\sigma)\mathrm{d}\sigma \leqslant \int_{\lambda+\delta}^{\infty} \psi_\varepsilon(\lambda-\sigma)\frac{M}{1+\sigma}\mathrm{d}\sigma \leqslant \frac{M}{1+\lambda+\delta}\int_{\lambda+\delta}^{\infty} \psi_\varepsilon(\lambda-\sigma)\mathrm{d}\sigma,$$

donc si ε *est choisi assez petit on a* $\int_{\lambda+\delta}^{\infty} \psi_\varepsilon(\lambda-\sigma)\mathrm{d}\sigma \leqslant \delta$ *ce qui donne*

$$\int_{\lambda+\delta}^{\infty} \psi_\varepsilon(\lambda-\sigma)A(\sigma)\mathrm{d}\sigma \leqslant M\delta/(1+\lambda). \tag{2}$$

D'autre part, on a $A(\sigma) = 0$ *pour* $\sigma \leqslant 0$, *puisque qu'alors* $e^\sigma \leqslant 1$ *et* $\pi(e^\sigma) = 0$. *On en déduit*

$$\int_{-\infty}^{\lambda-\delta} \psi_\varepsilon(\lambda-\sigma)A(\sigma)\mathrm{d}\sigma = \int_{0}^{\lambda-\delta} \psi_\varepsilon(\lambda-\sigma)A(\sigma)\mathrm{d}\sigma \leqslant M\int_{\delta}^{\lambda} \psi_\varepsilon(\sigma)\frac{\mathrm{d}\sigma}{1+\lambda-\sigma}$$

où on a utilisé la question précédente et un changement de variable pour la dernière inégalité. À présent on remarque que pour tout $\sigma \in [\delta, \lambda]$, *on a* $\sigma(1+\lambda-\sigma) \geqslant \delta(1+\lambda-\delta)$, *ce qui donne*

$$\int_{\delta}^{\lambda} \psi_\varepsilon(\sigma)\frac{\mathrm{d}\sigma}{1+\lambda-\sigma} \leqslant \frac{\delta^{-1}}{1+\lambda-\delta}\int_{\delta}^{\infty} \psi_\varepsilon(\sigma)\sigma\mathrm{d}\sigma.$$

Comme $\psi \in \mathscr{S}(\mathbf{R})$, *un changement de variable montre que la dernière intégrale tend vers* 0 *quand* $\varepsilon \to 0$, *donc si* ε *est choisi assez petit, on a* $\int_\delta^\infty \psi_\varepsilon(\sigma)\sigma\mathrm{d}\sigma \leqslant \delta^2$ *ce qui donne*

$$\int_{-\infty}^{\lambda-\delta} \psi_\varepsilon(\lambda-\sigma)A(\sigma)\mathrm{d}\sigma \leqslant \frac{M\delta}{\lambda}. \tag{3}$$

En combinant (2) *et* (3) *on obtient la première inégalité demandée.*

Pour la deuxième, il suffit de remarquer que pour tout $\sigma \in [\lambda-\delta, \lambda+\delta]$ *on a* $A(\sigma) \leqslant \pi(e^{\lambda+\delta})e^{-\lambda+\delta}$.

(iii) En déduire que $\liminf_{\lambda\to\infty} \frac{\pi(e^\lambda)}{e^\lambda}\lambda \geqslant 1$ et conclure.

Solution. Soit $\delta > 0$. On a, par la question précédente,

$$\liminf_{\lambda} \frac{\pi(e^\lambda)}{e^\lambda}\lambda = e^{-2\delta} \liminf_{\lambda} \frac{\pi(e^{\lambda+\delta})}{e^{\lambda-\delta}}\lambda \geqslant e^{-2\delta} \liminf_{\lambda} \lambda \int_{|\sigma-\lambda|\leqslant\delta} \psi_\varepsilon(\lambda-\sigma)A(\sigma)\mathrm{d}\sigma.$$

Or on a

$$\int_{|\sigma-\lambda|\leqslant\delta} \psi_\varepsilon(\lambda-\sigma)A(\sigma)\mathrm{d}\sigma = (\psi_\varepsilon \star A)(\lambda) - \int_{|\sigma-\lambda|>\delta} \psi_\varepsilon(\lambda-\sigma)A(\sigma)\mathrm{d}\sigma$$

d'où l'on tire, avec la première inégalité de la question précédente,

$$\begin{aligned}\liminf_{\lambda} \lambda \int_{|\sigma-\lambda|\leqslant\delta} \psi_\varepsilon(\lambda-\sigma)A(\sigma)\mathrm{d}\sigma &\geqslant \liminf_{\lambda} \lambda \left((\psi_\varepsilon \star A)(\lambda) - \frac{2M\delta}{\lambda}\right) \\ &= -2M\delta + \liminf_{\lambda} \lambda \, (\psi \star A)(\lambda).\end{aligned}$$

*Par la question **17** on a $\lambda\,(\psi\star A)(\lambda) \to 1$ quand $\lambda \to \infty$ et on conclut finalement que*

$$\liminf_{\lambda} \frac{\pi(e^\lambda)}{e^\lambda}\lambda \geqslant e^{-2\delta}\left(1 - 2M\delta\right).$$

*Le nombre $\delta > 0$ étant arbitraire, on obtient bien l'égalité voulue. Enfin par la question **19.**(iii) on obtient*

$$\liminf_{\lambda} \frac{\pi(e^\lambda)}{e^\lambda}\lambda = \limsup_{\lambda} \frac{\pi(e^\lambda)}{e^\lambda}\lambda = 1,$$

donc $\frac{\pi(e^\lambda)}{e^\lambda}\lambda \to 1$ quand $\lambda \to \infty$. Avec $x = e^\lambda$ on obtient bien

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{x/\log x} = 1.$$