Nantes Université, 2024 Pour toute question :
XMS2ME320 yann.chaubet@univ-nantes.fr

Analyse de Fourier
Devoir maison à rendre le 3 avril

Les parties **I** et **IV** sont facultatives. Seule la question **6** de la partie **I** est utilisée dans les parties **II** et **III**. L'objectif du devoir est de démontrer le résultat suivant.

Théorème (des nombres premiers)**.** *Pour tout $x \in \mathbf{R}$ on note $\pi(x)$ le nombre de nombres premiers inférieurs à x. Alors quand $x \to \infty$ on a l'équivalent*

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}.$$

On rappelle que la fonction ζ de Riemann est définie par

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p \in \mathscr{P}} \left(1 - p^{-s}\right)^{-1}, \qquad s \in \mathbf{C}_{>1}.$$

où $\mathbf{C}_{>1} = \{s \in \mathbf{C} \ : \ \operatorname{Re} s > 1\}$. Ici $\mathscr{P}$ est l'ensemble des nombres premiers. On rappelle aussi que la fonction ζ admet un prolongement méromorphe à tout le plan complexe, avec un unique pôle en $s = 1$, qui est simple avec résidu 1, et qu'on a

$$\zeta(1 + it) \neq 0, \qquad t \in \mathbf{R}^*.$$

Dans toute la suite, on notera pour $\operatorname{Re} s > 1$

$$\kappa(s) = \sum_{p \in \mathscr{P}} \frac{1}{p^s}.$$

On notera log la détermination principale du logarithme complexe, définie par

$$\log\left(re^{i\theta}\right) = \log(r) + i\theta, \quad r > 0, \quad \theta \in \left]-\pi, \pi\right[.$$

La fonction $\log : \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}_- \to \mathbf{C}$ ainsi définie est holomorphe sur $\mathbf{C} \setminus \mathbf{R}_-$ et on a le développement

$$-\log(1 - z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}, \qquad |z| < 1.$$

On pose en outre

$$\nu(s) = -\sum_{p \in \mathscr{P}} \log\left(1 - p^{-s}\right)$$

dès que $\operatorname{Re} s > 1$, de sorte que $\exp \nu(s) = \zeta(s)$ et que $\nu(\sigma) = \log \zeta(\sigma)$ si $\sigma > 1$.

I. Préliminaires

On pose $g(s) = \nu(s) - \kappa(s)$ pour $\operatorname{Re} s > 1$.

1. Montrer que pour tout $r \in \,]0, 1[$ il existe $C > 0$ telle que

$$|-\log(1-z) - z| \leqslant C|z|^2, \qquad |z| \leqslant r.$$

2. En déduire qu'il existe $C > 0$ telle que pour tout $s \in \mathbf{C}$ avec $\sigma = \operatorname{Re} s > 1/2$, on a

$$\left|-\log\left(1 - p^{-s}\right) - p^{-s}\right| \leqslant Cp^{-2\sigma}, \qquad p \in \mathscr{P}.$$

3. En déduire que la fonction g s'étend en une fonction holomorphe sur le demi-plan $\{s \in \mathbf{C} \ : \ \operatorname{Re} s > 1/2\}$.

4. Soit $t_0 \in \mathbf{R}^*$ et $s_0 = 1 + it_0$. Comme $\zeta(1 + it_0) \neq 0$, il existe un disque D_0, centré en s_0 et de rayon strictement inférieur à $1/2$, sur lequel ζ ne s'annule pas et on *admet* qu'on choisir $\nu_0 : D_0 \to \mathbf{C}$ holomorphe telle que $\exp \circ \nu_0 = \zeta$ sur D_0.

(i) Montrer qu'il existe $k \in \mathbf{Z}$ tel que $\nu_0 = \nu + 2\pi ik$ sur $D_0 \cap \mathbf{C}_{>1}$.

(ii) En déduire que κ a un prolongement holomorphe à $D_0 \cup \mathbf{C}_{>1}$.

5. On note $h : s \mapsto (s-1)\zeta(s)$.

(i) Montrer que la fonction h admet un prolongement analytique à $\mathbf{C}$ tel que $h(1) = 1$.

Soit D_0 un disque centré en 1 et de rayon strictement inférieur à $1/2$ sur lequel h ne s'annule pas, et $\nu_0 : D_0 \to \mathbf{C}$ holomorphe telle que $\exp \circ \nu_0 = h$.

(ii) Montrer qu'il existe $k \in \mathbf{Z}$ tel que $\nu_0(s) = \log(s-1) + \nu(s) + 2\pi ik$ pour tout $s \in \mathbf{C}_{>1} \cap D_0$.

(iii) Montrer que $\kappa(s) + \log(s-1)$ admet un prolongement holomorphe à $D_0 \cup \mathbf{C}_{>1}$.

6. Déduire des questions **4.** et **5.** que la fonction $\Phi : s \mapsto \kappa(s) + \log(s-1)$ admet un prolongement holomorphe à un voisinage ouvert du demi-plan $\{s \in \mathbf{C} \ : \ \operatorname{Re} s \geqslant 1\}$. En déduire que la fonction $\ell : \mathbf{R}^* \to \mathbf{C}$ donnée par

$$\ell(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \kappa(1 + \varepsilon + it)$$

est bien définie et que $t \mapsto \ell(t) - \log \dfrac{1}{it}$ s'étend à une fonction $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$.

II. Une mesure de comptage

Pour tout $x \in \mathbf{R}$ on note $\delta_x \in \mathscr{S}'(\mathbf{R})$ la distribution donnée par $\langle \delta_x, \varphi \rangle = \varphi(x)$ pour tout $\varphi \in \mathscr{S}$. On note

$$u = \sum_{p \in \mathscr{P}} \frac{1}{p} \delta_{\log p}.$$

7. On rappelle que pour tout $\alpha > 1$, on a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \log(n)^\alpha} < +\infty.$$

En déduire que u est bien une distribution tempérée sur $\mathbf{R}$.

Pour tout $\varepsilon > 0$ on note $u_\varepsilon = \sum_{p \in \mathscr{P}} \frac{1}{p^{1+\varepsilon}} \delta_{\log p}$.

8. Montrer que $u_\varepsilon \to u$ dans $\mathscr{S}'(\mathbf{R})$ quand $\varepsilon \to 0$.

9. Montrer que $\widehat{u}_\varepsilon = \ell_\varepsilon$ dans $\mathscr{S}'(\mathbf{R})$, où on a noté

$$\ell_\varepsilon(t) = \kappa(1 + \varepsilon + it), \qquad t \in \mathbf{R}.$$

10. Déduire de la question **6.**, que pour tout compact $K \subset \mathbf{R}$, il existe $C > 0$ telle que pour tout $\varepsilon > 0$ petit et tout $t \in K \setminus \{0\}$, on a la majoration

$$|\ell_\varepsilon(t)| \leqslant C + |\log |t||.$$

*Indication. On pourra écrire $\ell_\varepsilon(t) = \Phi(1 + \varepsilon + it) - \log(\varepsilon + it)$ où Φ est définie dans la question **6.***

11. En déduire que pour toute fonction $\varphi \in \mathscr{C}_c^\infty(\mathbf{R})$ on a

$$\sum_{p \in \mathscr{P}} \frac{\widehat{\varphi}(\log p)}{p} = \int_{\mathbf{R}} \varphi(t) \ell(t) \mathrm{d}t.$$

III. Une version régularisée du théorème

Dans ce qui suit on note $f_0 : t \mapsto (1 + it)^{-1}$ et $A : x \mapsto e^{-x} \pi(e^x)$.

12. Montrer que $f_0 \in L^2(\mathbf{R})$ et que pour presque tout $\lambda \in \mathbf{R}$ on a

$$\widehat{f_0}(\lambda) = 2\pi 1_{\mathbf{R}_-}(\lambda) e^\lambda.$$

13. Montrer que pour toute fonction $\varphi \in \mathscr{C}_c^\infty(\mathbf{R})$ et tout $p \in \mathscr{P}$ on a

$$\widehat{f_0 \varphi}(\log p) = \frac{1}{2\pi} (\widehat{f_0} \star \widehat{\varphi})(\log p) = p \int_{\mathbf{R}} \widehat{\varphi}(\lambda) e^{-\lambda} 1_{[\log p, +\infty[}(\lambda) \mathrm{d}\lambda$$

14. Montrer que $A \in L^\infty(\mathbf{R})$ et qu'on a

$$\int_{\mathbf{R}} \widehat{\varphi}(\lambda) A(\lambda) \mathrm{d}\lambda = \int_{\mathbf{R}} \varphi(t) \frac{\ell(t)}{1 + it} \mathrm{d}t, \qquad \varphi \in \mathscr{C}_c^\infty(\mathbf{R}).$$

*Indication. Appliquer la question **11.** avec $\phi = f_0 \varphi$.*

On se donne maintenant une fonction paire $\varphi \in \mathscr{C}_c^\infty(\mathbf{R})$ et on pose $\psi = \widehat{\varphi}$.

15. Montrer que ψ est paire et que pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$, on a

$$(\psi \star A)(\lambda) = \int_{\mathbf{R}} \frac{\ell(t)}{1 + it} \varphi(t) e^{it\lambda} \mathrm{d}t.$$

16. En utilisant la question **6**, montrer que pour tout $N \in \mathbf{N}$, il existe une constante $C_N > 0$ telle que

$$\left| \int_{\mathbf{R}} \left(\ell(t) - \log \frac{1}{it} \right) \frac{\varphi(t)}{1+it} e^{it\lambda} \mathrm{d}t \right| \leqslant C_N \langle \lambda \rangle^{-N}, \qquad \lambda \in \mathbf{R},$$

où $\langle \lambda \rangle = \sqrt{1+\lambda^2}$.

17. On rappelle que pour toute fonction $f \in \mathscr{S}(\mathbf{R})$, on a, quand $\lambda \to \infty$,

$$\int_{\mathbf{R}} \log \frac{1}{it} f(t) e^{it\lambda} \mathrm{d}t = \frac{2\pi f(0)}{\lambda} + o(\lambda^{-1}).$$

En déduire que $(\psi \star A)(\lambda) = \dfrac{2\pi\varphi(0)}{\lambda} + o(\lambda^{-1})$ quand $\lambda \to \infty$.

IV. Approximation de l'identité

18. Montrer qu'on peut choisir la fonction paire φ de sorte que

$$\varphi(0) = \frac{1}{2\pi}, \quad \psi = \widehat{\varphi} \geqslant 0 \quad \text{et} \quad \int_{\mathbf{R}} \psi(\lambda) \mathrm{d}\lambda = 1.$$

On se donne de telles fonctions φ et ψ et pour tout $\varepsilon > 0$ on pose

$$\psi_\varepsilon(\lambda) = \varepsilon^{-1} \psi_\varepsilon(\lambda/\varepsilon), \qquad t \in \mathbf{R}.$$

19. (i) Montrer que pour tout $\delta > 0$ il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$\int_{-\delta}^{\delta} \psi_\varepsilon(\lambda) \mathrm{d}\lambda \geqslant (1-\delta).$$

(ii) En déduire que pour tout $\delta > 0$ il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$(\psi_\varepsilon \star A)(\lambda) \geqslant (1-\delta)\pi(e^{\lambda-\delta})e^{-\lambda-\delta}, \qquad \lambda \in \mathbf{R}.$$

(iii) En utilisant la question **17.**, montrer que

$$\limsup_{\lambda \to \infty} \frac{\pi(e^\lambda)}{e^\lambda} \lambda \leqslant 1.$$

20. (i) En utilisant la question précédente, montrer qu'il existe $M > 0$ tel que

$$\frac{\pi(e^\lambda)}{e^\lambda} \leqslant \frac{M}{1+\lambda}, \qquad \lambda \geqslant 0.$$

(ii) En déduire que pour tout $\delta > 0$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $\lambda > \delta$ on a

$$\int_{|\sigma-\lambda|>\delta} \psi_\varepsilon(\lambda-\sigma) A(\sigma) \mathrm{d}\sigma \leqslant \frac{2M\delta}{\lambda} \quad \text{et} \quad \int_{|\sigma-\lambda|\leqslant\delta} \psi_\varepsilon(\lambda-\sigma) A(\sigma) \mathrm{d}\sigma \leqslant \frac{\pi(e^{\lambda+\delta})}{e^{\lambda-\delta}}.$$

(iii) En déduire que $\liminf\limits_{\lambda \to \infty} \dfrac{\pi(e^\lambda)}{e^\lambda} \lambda \geqslant 1$ et conclure.