Université de Nantes Année 2025-2026
XLG5MU010 - Algèbre et géométrie I

Feuille d'exercices 3
Dualité

I — Formes linéaires

Exercice 1

1. Montrer qu'il existe une forme linéaire l sur $\mathbb{R}^3$ vérifiant

$$l(1,1,1)=0,\ l(2,0,1)=1 \text{ et } l(1,2,3)=4.$$

2. Une telle forme est-elle unique ? Donner la dimension et une base du noyau de l.

Exercice 2 Soient a et b deux nombres réels tels que $a<b$. Montrer qu'il existe un unique triplet $(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^3$ vérifiant

$$\int_a^b P(t)\,dt = \alpha P(a)+\beta P\left(\tfrac{a+b}{2}\right)+\gamma P(b)$$

pour tout polynôme P de degré inférieur ou égal à 2.

Indication : traduire l'énoncé dans le langage des formes linéaires.

Exercice 3 ($\star$) Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie.

1. Montrer que si H est un hyperplan de E, alors il existe $a\notin H$, $a\neq 0$ tel que $E=H\oplus \mathrm{Vect}(a)$.

2. Montrer l'équivalence

$$H \text{ est un hyperplan de } E \Leftrightarrow H \text{ est le noyau d'une forme linéaire non nulle.}$$

3. Soit $E=\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices $n\times n$ à coefficients réels et soit $H\subset E$ le sous-ensemble de E formé des matrices de trace nulle. Montrer que H est un sev de E et que $E=H\oplus\mathrm{Vect}(I_n)$.

II — Bases duales, préduales

Exercice 4 Soit $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $b=(e_1,e_2,e_3)$ et soit $b^*=(e_1^*,e_2^*,e_3^*)$ la base duale de b. On considère la famille de vecteurs :

$$(u_1=(1,-1,1),u_2=(1,0,1),u_3=(0,2,-1)).$$

1. Montrer que (u_1,u_2,u_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.

2. Déterminer la base duale (u_1^*,u_2^*,u_3^*) de (u_1,u_2,u_3) en fonction de (e_1^*,e_2^*,e_3^*).

Exercice 5 Soient l_1 et l_2 les deux formes linéaires sur $\mathbb{R}^2$ définies par

$$l_1(x,y) = x + y \quad \text{et} \quad l_2(x,y) = x - y.$$

1. Montrer que (l_1, l_2) forme une base de $(\mathbb{R}^2)^*$.

2. Exprimer les formes linéaires f et g suivantes dans cette base :

$$f(x,y) = x \quad \text{et} \quad g(x,y) = 2x - 6y$$

3. Déterminer une base (u_1, u_2) de $\mathbb{R}^2$ dont la base duale est (l_1, l_2).

Exercice 6 Soient a_1, a_2, a_3 et a_4 quatre nombres réels deux à deux distincts. On considère les quatre polynômes de degré 3 suivants :

$$P_1(X) = \frac{(X-a_2)(X-a_3)(X-a_4)}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)(a_1-a_4)}, \quad P_2(X) = \frac{(X-a_1)(X-a_3)(X-a_4)}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)(a_2-a_4)}$$

$$P_3(X) = \frac{(X-a_1)(X-a_2)(X-a_4)}{(a_3-a_1)(a_3-a_2)(a_3-a_4)}, \quad P_4(X) = \frac{(X-a_1)(X-a_2)(X-a_3)}{(a_4-a_1)(a_4-a_2)(a_4-a_3)}.$$

1. Montrer que la famille (P_1, P_2, P_3, P_4) est une base de $\mathbb{R}_3[X]$, l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 3.

2. Déterminer un polynôme P vérifiant $P(0) = 2$, $P(1) = -2$, $P(2) = 5$ et $P(-1) = 0$.
Y a-t-il unicité ?

3. Déterminer la base duale $(P_1^*, P_2^*, P_3^*, P_4^*)$.

III — Orthogonalité

Exercice 7 Donner la dimension et une base des sous-espaces suivants de $\mathbb{R}^3$ ainsi que de leur orthogonal dans $(\mathbb{R}^3)^*$:

1. $F_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, y = 0\}$;

2. $F_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x - 3y + 2z = 0 \text{ et } 2x - y + z = 0\}$;

3. $F_3 = \mathrm{Vect}\big((1,2,3), (4,-3,1)\big)$.

Exercice 8 Donner la dimension et une base des sous-espaces suivants de $(\mathbb{R}^3)^*$ ainsi que de leur orthogonal dans $\mathbb{R}^3$ $\big((e_1, e_2, e_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$, (e_1^*, e_2^*, e_3^*) sa base duale$\big)$:

1. $G_1 = \mathrm{Vect}(e_1^* - e_2^* + 3e_3^*)$;

2. $G_2 = \mathrm{Vect}(e_1^* - e_2^* + 3e_3^*, 2e_1^* - e_2^* + 5e_3^*, 3e_1^* + 7e_3^*)$;

3. $G_3 = \mathrm{Vect}(e_1^* - e_2^* + 3e_3^*, 2e_1^* - e_3^*, e_1^* + 3e_2^* - 10e_3^*)$.

Exercice 9 ($\star$) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de E. Montrer que F est une intersection finie d'hyperplans de E.

Exercice 10 Soit $f \in E^*$ une forme linéaire non nulle. Montrer l'égalité $\mathrm{Ker}(f)^\perp = \mathrm{Vect}(f)$.

EXERCICE 11 Soit $f, f_1, ..., f_p \in E^*$. Montrer l'équivalence :

$$\bigcap_{i=1}^{p} \text{Ker}(f_i) \subset \text{Ker}(f) \Leftrightarrow f \in \text{Vect}(f_1, ...f_p).$$

Indication : pour l'implication directe, on pourra passer à l'orthogonal.

EXERCICE 12 ($\star$) Soit $\mathbb{K}$ un corps, ($\mathrm{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ par exemple) $n \in \mathbb{N}^*$ et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie (qui n'est pas n a priori). Soit $(f_1, ..., f_n)$ une famille de n formes linéaires de E^*. On considère l'application linéaire

$$u : \begin{pmatrix} E & \to & \mathrm{K}^n \\ x & \mapsto & \big(f_1(x), ..., f_n(x)\big) \end{pmatrix}$$

1. Montrer que u est injective si, et seulement si, $(f_1, ..., f_n)$ est génératrice de E^*.

Indication : on pourra passer à l'orthogonal.

2. Montrer que u est surjective si, et seulement si, $(f_1, ..., f_n)$ est libre dans E^*.

Indication : montrer que $\text{rg}(f_1, ..., f_n) = \text{rg}(u)$.

IV — TRANSPOSITION

EXERCICE 13 ($\star$) Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie.

1. Soit $l_1, l_2 \in E^*$ deux formes linéaires non nulles telles que $ker\, l_1 = ker\, l_2$. Montrer en utilisant la question 1) de l'exercice 3 qu'il existe $\lambda \in \mathrm{K}^*$ tel que $l_1 = \lambda\, l_2$ (i.e l_1 et l_2 sont proportionnelles).

2. Soit u un endomorphisme de E et soit $H = \ker l$ ($l \in E^*$, $l \neq 0$) un hyperplan de E stable par u (i.e. $u(H) \subset H$). Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathrm{K}^*$ tel que ${}^t u(l) = \lambda\, l$ (i.e un hyperplan stable est noyau d'une forme linéaire propre de ${}^t u$).

3. Application: soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

a) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de ${}^t A$.

b) Déterminer les plans de $\mathbb{R}^3$ stables par u.

EXERCICE 14 On suppose que E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. Soit u un endomorphisme de E. Montrer qu'il existe un hyperplan de E stable par u.
Indication : considérer le polynôme caractéristique de ${}^t u$.

EXERCICE 15 Soit u un endomorphisme de E qui laisse stable tous les hyperplans de E. Montrer que u est une homothétie. *Indication : montrer que tout vecteur de* E^* *est un vecteur propre de* ${}^t u$.

EXERCICE 16 Résoudre l'exercice 13 à l'aide du morphisme transposé ${}^t u$.

V — Bidual

Exercice 17 ($\star$) Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie, E^* son dual et E^{**} le dual de E^*. Pour $x \in E$, on note ev_x l'application de E^* dans K définie par :

$$\text{pour tout} \quad l \in E^*, \quad \mathrm{ev}_x(l) = l(x).$$

1. Montrer que ev_x est une forme linéaire sur E^* (*ie* un élément de E^{**}).

2. Montrer que l'application $x \mapsto \mathrm{ev}_x$ est un isomorphisme de E sur E^{**}.

Exercice 18 Soit p un entier quelconque et $x_1, ..., x_p$ des vecteurs de E tous non nuls. Montrer qu'il existe un hyperplan de E qui ne rencontre aucun des x_i.

On rappelle un résultat classique d'algèbre linéaire : soit G un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $G_1, ...G_p$ des sous-espaces de G. Alors $\bigcup\limits_{i=1}^{p} G_i$ est un espace vectoriel si, et seulement si, il est égal à l'un des G_i.