Feuille d'exercices 2
Réduction des endomorphismes

I — Révisions

Exercice 1

1. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Calculer le polynôme caractéristique χ_f de f.

3. Déterminer les valeurs propres de f et les sous-espaces propres associés.

4. L'endomorphisme f est-il diagonalisable sur $\mathbb{R}$? sur $\mathbb{C}$? Si oui, déterminer une base de vecteurs propres et donner la matrice de f dans cette base et la matrice de passage P de la base canonique vers cette nouvelle base.

5. Calculer A^k pour $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 2

Soient $n \in \mathbb{N}$ et E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à $2n$. On note $\Phi : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ l'application définie par

$$\Phi(P) = X(X+1)P' - 2nXP.$$

1. Vérifier que Φ est linéaire.

2. Vérifier que si $P \in E$, alors $\Phi(P) \in E$.

Dorénavant, Φ désignera cette application linéaire considérée de E dans E.

3. Donner la matrice de Φ dans la base $(1, X, \ldots, X^{2n})$.

4. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de Φ.

5. Φ est-il diagonalisable ? Si oui, donner une base de vecteurs propres pour Φ de E.

Exercice 3

On considère la matrice $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ donnée par

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \ddots & & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & & \ddots & 0 & 1 \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que -1 est valeur propre de M et que $\dim E_{-1} = n-1$.

2. En déduire que le polynôme caractéristique de M est scindé sur $\mathbb{R}$, puis que M est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que $\mathrm{sp(f)} = \{1, 2\}$ et déterminer les sous-espaces propres associés.

2. L'endomorphisme f est-il diagonalisable sur $\mathbb{R}$? trigonalisable sur $\mathbb{R}$?

3. Montrer que $\mathbb{R}^3 = \ker(f - \mathrm{Id})^2 \oplus \ker(f - 2\,\mathrm{Id}) = F_1 \oplus E_2$.

4. Soit $u_1 \in E_2$, $u_3 \in F_1 \setminus E_1$ et $u_2 = (f - \mathrm{Id})(u_3)$. Montrer que (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.

5. Donner la matrice de f dans la base (u_1, u_2, u_3).

6. Calculer A^k pour $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 5 ($\star$)

1. Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie. On suppose que tout vecteur non nul de E est vecteur propre de f. Que peut-on dire de f ?

2. On suppose que $\mathrm{Tr}(f) = 0$. Montrer que si f est non nulle, il existe un vecteur x tel que $(x, f(x))$ soit libre. En déduire l'existence d'une base dans laquelle la matrice de f est de diagonale nulle.

II — Réduction simultanée

Exercice 6 ($\star$)

1. Soient E un espace vectoriel de dimension finie et u et v deux endomorphismes de E qui commutent ($i.e \quad u \circ v = v \circ u$).

a) Montrer que chaque sous-espace propre de u est stable par v.

b) En déduire que si u et v sont diagonalisables, alors ils le sont simultanément, c'est-à-dire qu'il existe une base de E dans laquelle les matrices de u et v sont diagonales.

2. Soit A la matrice donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Montrer que A est diagonalisable et trouver une base de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres.

b) Déterminer le commutant de A (c'est à dire toutes les matrices qui commutent avec A).

c) Déterminer toutes les matrices réelles (resp. complexes) B vérifiant $B^2 = A$.

Exercice 7 ($\star$)

Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et u, v, deux endomorphismes de E qui commutent. Montrer que u et v sont simultanément trigonalisables.

Exercice 8 ($\star$)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ telles que $AB = 0$. Montrer que A et B sont simultanément trigonalisables.

III — Polynômes d'endomorphismes

Exercice 9

1. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ défini par $f(x, y) = (2x - y, -y)$. On note respectivement P_1 et P_2 les polynômes $X^3 - 5X^2 + 3X - 2$ et $X^2 - X - 2$.
Déterminer les endomorphismes $P_1(f)$ et $P_2(f)$.

2. Même question avec l'endomorphisme g de $\mathbb{C}^2$ donné par $g(x, y) = (x - iy, ix + y)$ et les polynômes $Q_1 = X^2 - iX + i + 1$ et $Q_2 = X(X - 2)$.
(Dans cette deuxième question, on regarde bien sûr $\mathbb{C}^2$ comme un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.)

Exercice 10 ($\star$)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $f^2 = 0$.

1. Montrer que f n'est pas injectif.

2. Soit $(e_1, ..., e_k)$ une base de $\ker f$ que l'on complète en une base $\mathbf{e}$ de E. Montrer que la matrice $[f]_{\mathbf{e}}$ est triangulaire supérieure.

Exercice 11

1. Déterminer le polynôme minimal d'une application linéaire de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

2. Que peut-on dire d'un endomorphisme dont le polynôme minimal est de degré 1 ?

Exercice 12

Déterminer le polynôme minimal des matrices rencontrées dans les exercices 1 et 4.

Exercice 13

Déterminer toutes les matrices de $\mathrm{M}_4(\mathbb{C})$ dont le polynôme minimal est égal à $X(X^2 + 1)$.

Exercice 14

Résoudre dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ l'équation (d'inconnue M) $M^3 + \mathrm{I}_n = 0$.

EXERCICE 15 ($\star$)

Soit $A \in M_2(\mathbb{Z})$. On suppose qu'il existe un entier naturel p tel que $A^p = I_2$. Montrer : $A^{12} = I_2$.

EXERCICE 16 ($\star$)

On considère un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension 2 et un endomorphisme f de E distinct de Id_E et vérifiant $f^3 = \mathrm{Id}_E$.

1. Déterminer le polynôme minimal et le polynôme caractéristique de f.

2. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ? Trigonalisable ?

3. Si x est un vecteur non nul de E, montrer que $(x, f(x))$ est une base de E. Quelle est la matrice de f dans cette base ?

EXERCICE 17

Soit E un espace vectoriel complexe de dimension n ($n \geqslant 2$) et f un endomorphisme de E distinct de Id_E, vérifiant $f^2 - 2f + \mathrm{Id}_E = 0$.

1. Montrer que $\mathrm{Im}(f - \mathrm{Id}_E) \subset \ker(f - \mathrm{Id}_E)$.

2. Démontrer que 1 est la seule valeur propre de f.

3. Calculer le déterminant de f.

4. Justifier que f n'est pas diagonalisable.

5. Déterminer le polynôme caractéristique et le polynôme minimal de f.

6. On suppose ici que $n = 3$. Déterminer $\dim \ker(f - \mathrm{Id}_E)$. En déduire qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

EXERCICE 18

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ de trace non nulle. On note $f : \mathrm{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ l'application définie par $f(M) = \mathrm{tr}(A)M - \mathrm{tr}(M)A$.

1. Montrer que f est linéaire.

2. Déterminer le noyau et l'image de f. (*Indication : on pourra calculer la trace de $f(M)$ pour $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$*).

3. Déterminer un polynôme annulateur pour f. (*Indication : il en existe un de degré* 2).

4. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

5. Déterminer le polynôme minimal de f.

IV — Décomposition de Dunford, de Jordan

EXERCICE 19 Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Donner la décomposition de Dunford de f.

2. Quel est le polynôme minimal de f ?

3. Déterminer tous les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ stables par f.

4. Calculer A^n pour tout entier naturel n.

5. Résoudre le système différentiel $X' = AX$ avec pour condition initiale $X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Exercice 20

Donner la décomposition de Dunford des matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -6 & -5 & -7 \\ 4 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Exercice 21

On note B la matrice de $\mathrm{M}_4(\mathbb{R})$ donnée par

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. B est-elle diagonalisable ?

2. Déterminer le polynôme minimal de B.

3. Donner la décomposition de Dunford de B.

Exercice 22

Déterminer la réduite de Jordan des matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

V — Compléments

Exercice 23

On démontre dans cet exercice le théorème de Cayley-Hamilton à l'aide de la notion de matrice compagnon.

1. Soit $P(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + ... + a_1X + a_0$ un polynôme unitaire. On appelle *matrice compagnon de* P la matrice

$$C(P) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & a_{n-2} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Montrer l'égalité $\chi_{C(P)} = P$, où $\chi_{C(P)}$ désigne le polynôme caractéristique de $C(P)$.

2. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$ et $f \in \mathcal{L}(E)$. Soit $x \in E$ non nul. On veut montrer que $\chi_f(f)(x) = 0$.

a) Montrer qu'il existe une base β de E dans laquelle la matrice de f est de la forme

$$[f]_\beta = \begin{pmatrix} C(P) & * \\ 0 & M \end{pmatrix}$$

où P est un polynôme de degré $\leqslant n$ vérifiant $P(f)(x) = 0$. (*Indication : on pourra considérer l'entier maximal* p *tel que* $\{x, f(x), ..., f^{p-1}(x)\}$ *est libre.*)

b) Conclure.

Exercice 24 ($\star$)

Soit E un espace vectoriel de dimension n. Un endomorphisme f de E est dit cyclique s'il existe $x \in E$ tel que $E = \mathrm{Vect}(x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$ (ou de manière équivalente, $\beta = (x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$ est un base de E).

1. Montrer que $[f]_\beta$ est une matrice compagnon.

2. En utilisant le résultat de l'exercice 5) 1), montrer que tout endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension 2 qui n'est pas une homothétie est un endomorphisme cyclique.

3. Montrer qu'un endomorphisme de E qui a n valeurs propres distinctes est un endomorphisme cyclique.

4. Montrer que si f est un endomorphisme cyclique alors $\deg \mu_f = n$.

5. A quelle condition un endomorphisme nilpotent est-il un endomorphisme cyclique?

6. Montrer que si f est cyclique alors $C(f) = \{g \in \mathcal{L}(E);\ g \circ f = f \circ g\} = \mathrm{K}[f]$, où $\mathrm{K}[f]$ désigne l'algèbre des polynômes en f.