Feuille d'exercices 1
Groupe symétrique et déterminants

I — Groupe symétrique

Exercice 1

Pour chacune des permutations suivantes, donner leur support, dire si ce sont des cycles et calculer leur signature et leur inverse.

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}$; **2.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 2 & 1 & 3 & \cdots & n \end{pmatrix}$; **3.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix}$; **4.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

Exercice 2

Décomposer $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 5 & 6 & 7 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ en produit de cycles à supports disjoints.

Exercice 3

Déterminer la signature des permutations suivantes et les décomposer en produit de cycles à supports disjoints.

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ n & n-1 & \cdots & 2 & 1 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n & n+1 & n+2 & \cdots & 2n-1 & 2n \\ 1 & 3 & 5 & \cdots & 2n-1 & 2 & 4 & \cdots & 2n-2 & 2n \end{pmatrix}$

Exercice 4

Soit $n \geqslant 2$ et τ une transposition de $\mathfrak{S}_n$.

1. Montrer que $\sigma \mapsto \tau \circ \sigma$ est une bijection de $\mathfrak{S}_n$ vers $\mathfrak{S}_n$.

2. En déduire le cardinal de l'ensemble formé par les permutations de signature 1.

Exercice 5

Soit $n \geqslant 2$ et $c = \begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_k \end{pmatrix} \in \mathfrak{S}_n$ un cycle de longueur k. Montrer que pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, la permutation

$$c_\sigma = \sigma \circ c \circ \sigma^{-1}$$

est aussi un cycle de longueur k que l'on précisera.

Exercice 6

Soit $n \geqslant 3$ un entier impair et $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ telle que $\sigma^2 = \mathrm{id}_{\{1,\dots,n\}}$. Montrer que σ admet un point fixe.

Exercice 7

Soit $n \geqslant 2$.

1. Pour $k > n$, calculer le nombre de permutations de $\mathfrak{S}_{2n}$ possédant un cycle de longueur k.

2. En déduire le nombre de permutations ne possédant que des cycles de longueur inférieure ou égale à n.

Application. On dispose de $2n$ joueurs, numérotés de 1 à $2n$. Dans une salle se trouvent $2n$ boîtes numérotées de 1 à $2n$ contenant chacune une carte numérotée de 1 à $2n$, placées au hasard. Chaque joueur, à tour de rôle et sans communiquer avec les autres, entre dans la salle et peut ouvrir jusqu'à n boîtes, en laissant chaque carte dans sa boîte, pour tenter d'y trouver la carte portant son propre numéro. Il réussit s'il la trouve, puis referme toutes les boîtes avant de sortir.

3. On suppose que chaque joueur choisit aléatoirement les n boîtes qu'il va ouvrir. Quelle est la probabilité que *tous* les joueurs réusissent ?

4. Déterminer une stratégie pour laquelle la probabilité que *tous* les joueurs réussissent soit supérieure à 30%.

5. Montrer qu'il existe une stratégie telle que la probabilité que *tous* les joueurs réussissent converge vers $1 - \log(2) \approx 30,69\%$ quand $n \to \infty$.

Exercice 8

Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ un cycle de longueur $k \geqslant 2$. Montrer que si $\rho \in \mathfrak{S}_n$ commute avec σ et que $\operatorname{supp} \rho \subset \operatorname{supp} \sigma$, alors il existe $\ell \in \mathbb{N}$ tel que $\rho = \sigma^\ell$.

II — Formes n-linéaires alternées

Dans tout ce qui suit, K désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Exercice 9

Soit $E = \mathrm{K}^n$ et f un endomorphisme de E. Pour $v_1, \dots, v_n \in E$, on note

$$\mu(v_1, \dots, v_n) = \sum_{k=1}^{n} \det(v_1, \dots, v_{k-1}, f(v_k), v_{k+1}, \dots, v_n).$$

Montrer que μ est une forme n-linéaire alternée et qu'on a

$$\mu = \mathrm{tr}(A) \det,$$

où A est la matrice de f dans la base canonique de K^n.

Exercice 10

On suppose ici $n = 2$ et $E = \mathrm{K}^2$. Montrer qu'on a

$$\det(v, w) = v_1 w_2 - v_2 w_1, \quad v = (v_1, v_2) \in \mathrm{K}^2, \quad w = (w_1, w_2) \in \mathrm{K}^2.$$

III — Déterminants

Exercice 11

1. Énoncer la propriété de développement du déterminant par rapport à une ligne ou une colonne.

2. L'appliquer pour calculer

$$\det\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ x & y & z\\ x^2 & y^2 & z^2\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \det\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

Exercice 12

Soit $n \geqslant 1$. On suppose ici $\mathrm{K} = \mathbb{R}$ et qu'il existe $J \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice telle que $J^2 = -\mathrm{I}_n$. Montrer que n est pair.

Exercice 13

Soit $n \geqslant 1$ et $A \in \mathrm{M}_n(\mathrm{K})$ une matrice. Pour $x \in \mathrm{K}$ on note $A(x)$ la matrice dont le terme général est $a_{i,j} + x$.

1. Montrer que $x \mapsto \det A(x)$ est polynomiale de degré au plus 1.

2. En déduire, pour $a, b \in \mathrm{K}$ distincts et $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathrm{K}$, la valeur du déterminant de la matrice

$$\begin{pmatrix}\alpha_1 & a & \cdots & a\\ b & \alpha_2 & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & a\\ b & \cdots & b & \alpha_n\end{pmatrix}.$$

Exercice 14

Pour $x_1, \ldots, x_n \in \mathrm{K}$, on pose

$$V_n(x_1, \ldots, x_n) = \det\begin{pmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1}\end{pmatrix}.$$

Dans toute la suite, on fixe des scalaires $x_1, \ldots, x_n \in \mathrm{K}$ deux à deux distincts.

1. Montrer que la fonction

$$f : x \mapsto V_n(x_1, \ldots, x_{n-1}, x)$$

est polynomiale et préciser le degré.

2. Montrer que $f(x_j) = 0$ pour tous $j = 1, \ldots, n-1$ et en déduire qu'il existe une constante $\lambda \in \mathrm{K}$ telle que

$$f(x) = \lambda \prod_{j=1}^{n-1} (x - x_j), \quad x \in \mathrm{K}.$$

3. Montrer que $\lambda = V_{n-1}(x_1, \ldots, x_{n-1})$.

4. En déduire par récurrence que

$$V_n(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_j - x_i).$$

Exercice 15

Pour $n \geqslant 1$, on considère la matrice tridiagonale

$$T_n = \begin{pmatrix} b_1 & c_1 & & & \\ a_2 & b_2 & c_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & a_n & b_n \end{pmatrix}.$$

1. Établir la récurrence $D_n = \det(T_n) = b_n D_{n-1} - a_n c_{n-1} D_{n-2}$ avec $D_0 = 1$, $D_1 = b_1$.

2. Cas constant : si $a_i = a$, $b_i = b$, $c_i = c$ (constants), résoudre la récurrence et donner D_n en fonction des racines de $X^2 - bX + ac$.

3. Application : calculer le déterminant de la matrice T_n quand $b_j = 2$ et $a_j, c_j = -1$ pour tout $j = 1, \ldots, n$.

Exercice 16

Soient $m, n \geqslant 1$ des entiers. On se donne des matrices

$$A \in \mathrm{M}_m(\mathrm{K}), \quad D \in \mathrm{M}_n(\mathrm{K}) \quad \text{et} \quad B \in \mathrm{M}_{n,m}(\mathrm{K})$$

et définit la matrice $M \in \mathrm{M}_{m+n}(\mathrm{K})$ comme étant la matrice par blocs

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}.$$

Montrer que $\det M = \det(A)\det(D)$.