Université de Nantes Année 2025-2026
XLG5MU010 - Algèbre et Géométrie I

Problème de révision

Le but de ce problème est de réviser quelques notions d'algèbre linéaire. Dans toute la suite, on note $\mathrm{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et on se donne un K-espace vectoriel E de dimension finie $n \geqslant 1$. On note $E^\star$ l'espace dual de E. On note $\mathscr{L}(E)$ l'espace des applications linéaires de E dans E. Pour $f \in \mathscr{L}(E)$ et $\beta = (v_1, \ldots, v_n)$ et $\gamma = (w_1, \ldots, w_n)$ sont des bases de E, on note ${}_\gamma[f]_\beta$ la matrice de f de la base β vers la base γ, c'est-à-dire la matrice dont les coefficients $a_{i,j}$ vérifient

$$f(v_k) = \sum_{j=1}^{n} a_{j,k} w_j.$$

On notera simplement $[f]_\beta = {}_\beta[f]_\beta$ la matrice de f dans la base β. On note $\det(f)$ (resp. $\mathrm{tr}(f)$) le déterminant de f (resp. la trace de f), c'est-à-dire qu'on a

$$\det(f) = \det([f]_\beta) \quad \text{et} \quad \mathrm{tr}(f) = \mathrm{tr}([f]_\beta),$$

pour une base quelconque β de E (les définitions ne dépendent pas du choix de la base).

Enfin, pour tous $\ell \in E^\star$ et $x \in E$, on note $\Phi_{\ell,v} \colon E \to E$ l'application définie par

$$\Phi_{\ell,v}(x) = \ell(x)v, \quad x \in E.$$

I — Endomorphismes de rang 1

1. Dans cette question on fixe $\ell \in E^\star$ et $v \in E$.

(i) Montrer que $\Phi_{\ell,v} \in \mathscr{L}(E)$ et que $\Phi_{\ell,v} = 0$ si et seulement si $\ell = 0$ ou $v = 0$.

Solution. Soit $x, y \in E$ et $\alpha, \beta \in \mathrm{K}$. On a

$$\Phi_{\ell,v}(\alpha x + \beta y) = \ell(\alpha x + \beta y)v = (\alpha\ell(x) + \beta\ell(y))v = \alpha\ell(x)v + \beta\ell(y)v = \alpha\Phi_{\ell,v}(x) + \beta\Phi_{\ell,v}(y).$$

Donc $\Phi_{\ell,v}$ est linéaire. Si $\ell = 0$ ou $v = 0$, alors pour tout $x \in E$ on a $\Phi_{\ell,v}(x) = 0$ donc $\Phi_{\ell,v} = 0$. Réciproquement, si $\Phi_{\ell,v} = 0$, alors pour tout $x \in E$ on a $\ell(x)v = 0$. Si $v \neq 0$, il existe $x_0 \in E$ tel que $\ell(x_0) \neq 0$ (sinon $\ell = 0$). Donc $\ell(x_0)v = 0$ implique que $v = 0$.

(ii) On suppose $\Phi_{\ell,v} \neq 0$. Montrer que $\Phi_{\ell,v}$ est de rang 1, c'est-à-dire que $\dim \mathrm{Im}(\Phi_{\ell,v}) = 1$.

Solution. Comme $\Phi_{\ell,v} \neq 0$, on a $\ell \neq 0$ et $v \neq 0$ d'après la question précédente. Pour tout $x \in E$, on a $\Phi_{\ell,v}(x) = \ell(x)v \in \mathrm{K}v$. Donc $\mathrm{Im}(\Phi_{\ell,v}) \subset \mathrm{K}v$. Comme $v \neq 0$, on a $\dim \mathrm{K}v = 1$. Par ailleurs, comme $\ell \neq 0$, il existe $x_0 \in E$ tel que $\ell(x_0) \neq 0$. Donc $\Phi_{\ell,v}(x_0) = \ell(x_0)v \neq 0$ et ainsi $\mathrm{Im}(\Phi_{\ell,v})$ contient un vecteur non nul. Donc $\dim \mathrm{Im}(\Phi_{\ell,v}) \geqslant 1$. On en déduit que

$$\dim \mathrm{Im}(\Phi_{\ell,v}) = 1.$$

2. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme de rang 1.

(i) Soit $H = \ker(f)$. Montrer qu'il existe $\ell \in E^\star$ telle que $H = \ker \ell$.

Solution. Comme f est de rang 1, on a $\dim \operatorname{Im}(f) = 1$. Par le théorème du rang, on a

$$\dim E = \dim \ker(f) + \dim \operatorname{Im}(f) = \dim \ker(f) + 1.$$

Donc $\dim \ker(f) = n - 1$. Par conséquent, $\ker(f)$ est un hyperplan de E. Il existe donc une forme linéaire $\ell \in E^\star$ non nulle telle que $\ker(f) = \ker(\ell)$.

(ii) Soit $w \in E$ non nul tel que $\operatorname{Im}(f) = \mathrm{K}w$. Soit $\eta \in E^\star$ telle que $\eta(w) = 1$. Montrer que

$$\ker f^\top(\eta) \supset \ker \ell$$

et en déduire qu'il existe $\alpha \in \mathrm{K}$ tel que $f^\top(\eta) = \alpha\ell$.

Solution. Soit $x \in \ker \ell = \ker(f)$. On a donc $f(x) = 0$. Par définition du transposé, on a

$$f^\top(\eta)(x) = \eta(f(x)) = \eta(0) = 0.$$

Donc $x \in \ker f^\top(\eta)$. On en déduit que $\ker \ell \subset \ker f^\top(\eta)$. Par le cours, on obtient que $f^\top(\eta)$ est un multiple de ℓ, ce qu'on voulait démontrer.

(iii) On pose $v = \alpha w$. Montrer que pour tout $x \in E$ on a $f(x) - \Phi_{\ell,v}(x) \in \ker \eta \cap \mathrm{K}w$ et en déduire que

$$f = \Phi_{\ell,v}.$$

Solution. Soit $x \in E$. On a

$$f^\top(\eta)(x) = \eta(f(x)) = \alpha\ell(x) = \eta(\Phi_{\ell,v}(x)).$$

Donc $\eta(f(x) - \Phi_{\ell,v}(x)) = 0$, ce qui montre que $f(x) - \Phi_{\ell,v}(x) \in \ker \eta$. Par ailleurs, on a $f(x) \in \operatorname{Im}(f) = \mathrm{K}w$ et $\Phi_{\ell,v}(x) \in \mathrm{K}v = \mathrm{K}w$. Donc $f(x) - \Phi_{\ell,v}(x) \in \mathrm{K}w$. On en déduit que $f(x) - \Phi_{\ell,v}(x) \in \ker \eta \cap \mathrm{K}w$. Comme $\eta(w) = 1$, on a $\ker \eta \cap \mathrm{K}w = \{0\}$. Donc $f(x) - \Phi_{\ell,v}(x) = 0$ pour tout $x \in E$, ce qui montre que $f = \Phi_{\ell,v}$.

3. Soient $\ell \in E^\star$ et $v \in E$ non nul. On complète v en une base $\beta = (v, e_2, \ldots, e_n)$ de E. Montrer

$$[\Phi_{\ell,v}]_\beta = \begin{pmatrix} \ell(v) & \ell(e_2) & \cdots & \ell(e_n) \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

et en déduire que $\operatorname{tr}(\Phi_{\ell,v}) = \ell(v)$. Montrer que cette identité reste vraie lorsque $v = 0$.

Solution. On a $\Phi_{\ell,v}(v) = \ell(v)v$ et pour tout $k = 2, \ldots, n$,

$$\Phi_{\ell,v}(e_k) = \ell(e_k)v.$$

Donc la matrice de $\Phi_{\ell,v}$ dans la base β est bien celle donnée dans l'énoncé. On obtient bien

$$\operatorname{tr}(\Phi_{\ell,v}) = \operatorname{tr}([\Phi_{\ell,v}]_\beta) = \ell(v).$$

Si $v = 0$, alors pour tout $x \in E$ on a $\Phi_{\ell,v}(x) = \ell(x)0 = 0$. Donc $\Phi_{\ell,v} = 0$ et ainsi on obtient $\operatorname{tr}(\Phi_{\ell,v}) = 0 = \ell(0) = \ell(v)$.

4. Soient $\ell, \eta \in E^\star$ et $v, w \in E$. Montrer que

$$\Phi_{\eta,w} \circ \Phi_{\ell,v} = \eta(v)\Phi_{\ell,w}.$$

Solution. Pour tout $x \in E$, on a

$$\Phi_{\eta,w}(\Phi_{\ell,v}(x)) = \Phi_{\eta,w}(\ell(x)v) = \ell(x)\Phi_{\eta,w}(v) = \ell(x)\eta(v)w = \eta(v)\Phi_{\ell,w}(x).$$

5. En appliquant la question précédente avec $\ell = \eta$ et $v = w$, et en utilisant les questions **????** et **??**, montrer que pour tout endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$ de rang 1, on a

$$f^2 = \mathrm{tr}(f)f.$$

Solution. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ de rang 1. D'après la question **????**, il existe $\ell \in E^\star$ et $v \in E$ tels que $f = \Phi_{\ell,v}$. Par la question précédente, on a

$$f^2 = \Phi_{\ell,v} \circ \Phi_{\ell,v} = \ell(v)\Phi_{\ell,v}.$$

Par la question **??**, on a $\ell(v) = \mathrm{tr}(\Phi_{\ell,v}) = \mathrm{tr}(f)$. On en déduit que

$$f^2 = \mathrm{tr}(f)f.$$

6. Soient $\beta = (v_1, \ldots, v_n)$ et $\gamma = (w_1, \ldots, w_n)$ deux bases de E. On note $\beta^\star = (v_1^\star, \ldots, v_n^\star)$ et $\gamma^\star = (w_1^\star, \ldots, w_n^\star)$ leurs bases duales. On se donne $f \in \mathscr{L}(E)$ et on note $A = (a_{i,j}) = {}_\gamma[f]_\beta$.

(i) Montrer que pour tous $i, j, k = 1, \ldots, n$ on a $\Phi_{v_i^\star,w_j}(v_k) = \delta_{i,k}w_j$ où $\delta_{i,k} = 1$ si $i = k$ et $\delta_{i,k} = 0$ sinon.

Solution. Soient $i, j, k \in \{1, \ldots, n\}$. On a

$$\Phi_{v_i^\star,w_j}(v_k) = v_i^\star(v_k)w_j = \delta_{i,k}w_j.$$

(ii) En déduire que pour tout $k = 1, \ldots, n$, on a

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\Phi_{v_i^\star,w_j}(v_k) = \sum_{j=1}^{n} a_{j,k}w_j.$$

Solution. Soit $k \in \{1, \ldots, n\}$. On a

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\Phi_{v_i^\star,w_j}(v_k) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\delta_{i,k}w_j \\
&= \sum_{j=1=1}^{n} a_{k,j}w_j \\
&= \sum_{j=1}^{n} a_{j,k}w_j.
\end{aligned}$$

(iii) En déduire que $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j}\Phi_{v_i^\star,w_j} = f$.

Solution. Soit $k \in \{1,\ldots,n\}$. Par définition de la matrice de f, on a

$$f(v_k) = \sum_{j=1}^n a_{j,k} w_j.$$

Par la question précédente, on a aussi

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j}\Phi_{v_i^\star,w_j}(v_k) = \sum_{j=1}^n a_{j,k} w_j.$$

On en déduit que pour tout $k \in \{1,\ldots,n\}$, on a

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j}\Phi_{v_i^\star,w_j}(v_k) = f(v_k).$$

Comme $(v_1,\ldots,v_n)$ est une base de E, on en déduit que

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j}\Phi_{v_i^\star,w_j} = f.$$

(iv) Montrer que la famille $\left(\Phi_{v_i^\star,w_j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est une base de $\mathscr{L}(E)$.

Solution. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. Par la question précédente, il existe des scalaires $a_{i,j} \in \mathrm{K}$ tels que

$$f = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j}\Phi_{v_i^\star,w_j}.$$

Ainsi, la famille $\left(\Phi_{v_i^\star,w_j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ engendre $\mathscr{L}(E)$. Par ailleurs, on a $\dim \mathscr{L}(E) = n^2$ et la famille $\left(\Phi_{v_i^\star,w_j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ contient n^2 éléments. On en déduit que cette famille est une base de $\mathscr{L}(E)$.

7. Montrer que pour toute base $(v_1,\ldots,v_n)$, on a $\mathrm{Id}_E = \sum_{i=1}^n \Phi_{v_i^\star,v_i}$ où $(v_1^\star,\ldots,v_n^\star)$ est la base duale de $(v_1,\ldots,v_n)$.

Solution. Soit $x \in E$. On a

$$\sum_{i=1}^n \Phi_{v_i^\star,v_i}(x) = \sum_{i=1}^n v_i^\star(x) v_i.$$

Par définition de la base duale, on a $v_i^\star(x) = \alpha_i$ où les α_i sont les scalaires tels que $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$. Donc

$$\sum_{i=1}^n \Phi_{v_i^\star,v_i}(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i = x.$$

On en déduit que pour tout $x \in E$, on a $\left(\sum_{i=1}^n \Phi_{v_i^\star,v_i}\right)(x) = x$, ce qui montre que

$$\mathrm{Id}_E = \sum_{i=1}^n \Phi_{v_i^\star,v_i}.$$

8. Soient $\ell \in E^\star$ et $v \in E$, tous deux non nuls.

(i) Montrer que $(\Phi_{\ell,v})^2 = \ell(v)\Phi_{\ell,v}$ et calculer le polynôme minimal de $\Phi_{\ell,v}$.

Solution. Par la question **5.**, on a

$$(\Phi_{\ell,v})^2 = \ell(v)\Phi_{\ell,v}.$$

Ainsi le polynôme $P(X) = X^2 - \ell(v)X$ annule $\Phi_{\ell,v}$. Si $n = 1$, alors $\Phi_{\ell,v}$ est l'homothétie de rapport $\ell(v)$ donc le polynôme minimal $\mu_{\ell,v}$ de $\Phi_{\ell,v}$ est $X - \ell(v)$. Si $n \geqslant 2$, alors $\mu_{\ell,v}$ est de degré au moins 2 puisque $\Phi_{\ell,v}$ est de rang 1, donc n'est pas une homothétie. Ainsi, dans ce cas, on a

$$\mu_{\ell,v}(X) = X^2 - \ell(v)X = X(X - \ell(v)).$$

(ii) On suppose $\ell(v) \neq 0$. Montrer que $\Phi_{\ell,v}$ est diagonalisable, calculer ses valeurs propres et déterminer les sous-espaces propres associés.

Solution. Comme $\ell(v) \neq 0$, le polynôme minimal de $\Phi_{\ell,v}$ est $\mu_{\ell,v}(X) = X(X - \ell(v))$ qui est scindé à racines simples. Ainsi $\Phi_{\ell,v}$ est diagonalisable. Le noyau de $\Phi_{\ell,v}$ est $\ker \ell$ qui est de dimension $n-1$. En outre v est un vecteur propre de $\Phi_{\ell,v}$ associé à la valeur propre $\ell(v)$. Donc les valeurs propres de $\Phi_{\ell,v}$ sont 0 et $\ell(v)$ et les espaces propres associés sont

$$\ker \ell \quad \text{et} \quad \mathrm{K}v.$$

(iii) On suppose $\ell(v) = 0$. Montrer que $\Phi_{\ell,v}$ n'est pas diagonalisable et qu'il existe une base β de E telle que

$$[\Phi_{\ell,v}]_\beta = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in M_n(\mathrm{K}).$$

Solution. Comme $\ell(v) = 0$, le polynôme minimal de $\Phi_{\ell,v}$ est $\mu_{\ell,v}(X) = X^2$ qui n'est pas scindé à racines simples. Ainsi, $\Phi_{\ell,v}$ n'est pas diagonalisable. On complète v en une base $(v, e_3, \ldots, e_n)$ de $\ker \ell$. On choisit $e_2 \in E$ tel que $\ell(e_2) = 1$ (un tel vecteur existe car $\ell \neq 0$). Alors la base β convient. En effet $\Phi_{\ell,v}(v) = 0$ et $\Phi_{\ell,v}(e_k) = 0$ pour $k \geqslant 3$, et $\Phi_{\ell,v}(e_2) = \ell(e_2)v = v$.

II — Opérateurs de composition

Dans cette partie on fixe $f \in \mathscr{L}(E)$. Par souci de simplicité on notera $\mathscr{E} = \mathscr{L}(E)$. On définit l'application $\Gamma_f : \mathscr{E} \to \mathscr{E}$ par

$$\Gamma_f(g) = f \circ g, \quad g \in \mathscr{E}.$$

9. Montrer que $\Gamma_f \in \mathscr{L}(\mathscr{E})$ et donner $\dim \mathscr{L}(\mathscr{E})$. Ainsi, $\Gamma_f \in \mathscr{L}(\mathscr{L}(E))$ est un endomorphisme de l'espace des endomorphismes de E.

Solution. Soient $g, h \in \mathscr{E}$ et $\alpha, \beta \in \mathrm{K}$. On a

$$\Gamma_f(\alpha g + \beta h) = f \circ (\alpha g + \beta h) = \alpha(f \circ g) + \beta(f \circ h) = \alpha\Gamma_f(g) + \beta\Gamma_f(h).$$

Donc Γ_f est linéaire. Par ailleurs, on a

$$\dim \mathscr{L}(\mathscr{E}) = (\dim \mathscr{E})^2 = (n^2)^2 = n^4.$$

10. Montrer que pour tous $\ell \in E^\star$ et $v \in E$, on a $\Gamma_f(\Phi_{\ell,v}) = \Phi_{\ell,f(v)}$.

Solution. Soient $\ell \in E^\star$ et $v \in E$. Pour tout $x \in E$, on a

$$\Gamma_f(\Phi_{\ell,v})(x) = (f \circ \Phi_{\ell,v})(x) = f(\ell(x)v) = \ell(x)f(v) = \Phi_{\ell,f(v)}(x).$$

11. On se donne une base $\beta = (v_1, \ldots, v_n)$ de E et une base $(\ell_1, \ldots, \ell_n)$ de $E^\star$. Montrer que

$$\Gamma_f(\Phi_{\ell_i,v_j}) = \sum_{k=1}^{n} a_{k,j}\Phi_{\ell_i,v_k}, \quad i, j = 1, \ldots, n,$$

où $A = (a_{i,j}) = [f]_\beta$ est la matrice de f dans la base β.

Solution. Soient $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Par la question précédente, on a

$$\Gamma_f(\Phi_{\ell_i,v_j}) = \Phi_{\ell_i,f(v_j)}.$$

Par définition de la matrice de f, on a

$$f(v_j) = \sum_{k=1}^{n} a_{k,j}v_k.$$

Donc, pour tout $x \in E$, on a

$$\begin{aligned}
\Phi_{\ell_i,f(v_j)}(x) &= \ell_i(x)f(v_j) \\
&= \ell_i(x)\sum_{k=1}^{n} a_{k,j}v_k \\
&= \sum_{k=1}^{n} a_{k,j}\ell_i(x)v_k \\
&= \sum_{k=1}^{n} a_{k,j}\Phi_{\ell_i,v_k}(x).
\end{aligned}$$

12. En déduire, en utilisant la question **????**, que $\mathrm{tr}(\Gamma_f) = n\,\mathrm{tr}(f)$.

Solution. Par la question **????**, la famille $\left(\Phi_{\ell_i,v_j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est une base de $\mathscr{E}$. Par la question précédente, on a

$$\Gamma_f(\Phi_{\ell_i,v_j}) = \sum_{k=1}^{n} a_{k,j}\Phi_{\ell_i,v_k}.$$

Les coefficients diagonaux de la matrice de Γ_f dans la base $\widetilde{\beta} = \left(\Phi_{\ell_i,v_j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ sont donnés par

$$([\Gamma_f]_{\widetilde{\beta}})_{(i,j),(i,j)} = a_{j,j}.$$

Il suit que la trace de Γ_f est

$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} ([\Gamma_f]_{\widetilde{\beta}})_{(i,j),(i,j)} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{j,j} = n\sum_{j=1}^{n} a_{j,j} = n\,\mathrm{tr}(f).$$

Pour tout $\lambda \in \mathrm{K}$ on note E_λ (respectivement C_λ) le sous-espace propre de f (respectivement le sous-espace caractéristique de f) associé à λ. On note aussi $\mathscr{E}_\lambda$ (respectivement $\mathscr{C}_\lambda$) le sous-espace propre de Γ_f (respectivement le sous-espace caractéristique de Γ_f) associé à λ.

13. Montrer que pour tout $P \in \mathrm{K}[X]$, on a $P(\Gamma_f)(g) = P(f) \circ g$ pour tout $g \in \mathscr{E}$.

Solution. On montre le résultat par récurrence sur le degré de P. Si P est constant égale à $c \in \mathrm{K}$, alors pour tout $g \in \mathscr{E}$, on a

$$P(\Gamma_f)(g) = c\,\mathrm{Id}_{\mathscr{E}}(g) = cg = c\,\mathrm{Id}_E \circ g = P(f) \circ g.$$

Supposons maintenant que le résultat est vrai pour tout polynôme de degré d et soit $Q \in \mathrm{K}[X]$ de degré $d+1$. On peut écrire $Q(X) = XP(X) + c$ où $P \in \mathrm{K}[X]$ est de degré d et $c \in \mathrm{K}$. Alors, pour tout $g \in \mathscr{E}$, on a

$$\begin{aligned} Q(\Gamma_f)(g) &= (\Gamma_f \circ P(\Gamma_f) + c\,\mathrm{Id}_{\mathscr{E}})(g) \\ &= \Gamma_f(P(\Gamma_f)(g)) + cg \\ &= f \circ (P(\Gamma_f)(g)) + cg \\ &= f \circ (P(f) \circ g) + cg \quad \text{(par hypothèse de récurrence)} \\ &= (f \circ P(f) + c\,\mathrm{Id}_E) \circ g \\ &= Q(f) \circ g. \end{aligned}$$

14. Montrer que pour tout $g \in \mathscr{E}$, on a $P(\Gamma_f)(g) = 0$ si et seulement si $\mathrm{Im}(g) \subset \ker(P(f))$.

Solution. Soit $g \in \mathscr{E}$. Par la question précédente, on a

$$P(\Gamma_f)(g) = P(f) \circ g.$$

Donc $P(\Gamma_f)(g) = 0$ si et seulement si pour tout $x \in E$, on a $P(f)(g(x)) = 0$, c'est-à-dire si et seulement si pour tout $x \in E$, on a $g(x) \in \ker(P(f))$. Cela revient à dire que $\mathrm{Im}(g) \subset \ker(P(f))$.

15. Soit $M \subset E$ un sous-espace et $\mathscr{F}_M = \{g \in \mathscr{E} \mid \mathrm{Im}(g) \subset M\}$. Montrer que $\mathscr{F}_M$ est un sous-espace de $\mathscr{E}$ de dimension $n \dim M$.

Solution. Cet espace est naturellement identifié avec l'ensemble des applications linéaires de E dans M. Donc $\dim \mathscr{F}_M = n \dim M$.

16. En déduire que pour tout $\lambda \in \mathrm{K}$, on a $\dim \mathscr{E}_\lambda = n \dim E_\lambda$ et $\dim \mathscr{C}_\lambda = n \dim C_\lambda$.
Indication. Pour la deuxième égalité, on pourra utiliser le fait que pour tous $r \in \mathbb{N}$ *et* $\lambda \in \mathrm{K}$, *on a* $\ker(\Gamma_f - \lambda \mathrm{Id}_{\mathscr{E}})^r = \mathscr{F}_M$ *avec* $M = \ker(f - \lambda \mathrm{Id}_E)^r$.

Solution. Soit $\lambda \in \mathrm{K}$. Par la question précédente, on a

$$\mathscr{E}_\lambda = \{g \in \mathscr{E} \mid \mathrm{Im}(g) \subset E_\lambda\} = \mathscr{F}_{E_\lambda}.$$

Donc $\dim \mathscr{E}_\lambda = n \dim E_\lambda$. Pour la deuxième égalité, on utilise l'indication. Soit $r \in \mathbb{N}$. On a

$$\ker(\Gamma_f - \lambda \mathrm{Id}_{\mathscr{E}})^r = \{g \in \mathscr{E} \mid \mathrm{Im}(g) \subset \ker(f - \lambda \mathrm{Id}_E)^r\} = \mathscr{F}_M$$

avec $M = \ker(f - \lambda \mathrm{Id}_E)^r$. Donc

$$\dim \ker(\Gamma_f - \lambda \mathrm{Id}_{\mathscr{E}})^r = n \dim \ker(f - \lambda \mathrm{Id}_E)^r.$$

Si r est suffisamment grand, on a $\mathscr{C}_\lambda = \ker(\Gamma_f - \lambda \mathrm{Id}_{\mathscr{E}})^r$ et $C_\lambda = \ker(f - \lambda \mathrm{Id}_E)^r$. On en déduit que

$$\dim \mathscr{C}_\lambda = n \dim C_\lambda.$$

17. Montrer que f est diagonalisable si et seulement si Γ_f est diagonalisable. Montrer que dans ce cas, on a $\det \Gamma_f = \det(f)^n$.

Solution. Notons que f est diagonalisable si et seulement si $\sum_{\lambda \in \mathrm{sp}(f)} \dim E_\lambda = \dim E$. De même, Γ_f est diagonalisable si et seulement si $\sum_{\lambda \in \mathrm{sp}(\Gamma_f)} \dim \mathscr{E}_\lambda = \dim \mathscr{E}$. Or, on a montré que $\dim \mathscr{E}_\lambda = n \dim E_\lambda$, donc $\mathrm{sp}(f) = \mathrm{sp}(\Gamma)$ et

$$\sum_{\lambda \in \mathrm{sp}(\Gamma_f)} \dim \mathscr{E}_\lambda = n \sum_{\lambda \in \mathrm{sp}(f)} \dim E_\lambda.$$

On en déduit que f est diagonalisable si et seulement si Γ_f est diagonalisable. Comme Γ_f est diagonalisable, on a

$$\det(\Gamma_f) = \prod_{\lambda \in \mathrm{sp}(\Gamma_f)} \lambda^{\dim \mathscr{E}_\lambda} = \prod_{\lambda \in \mathrm{sp}(f)} \lambda^{n \dim E_\lambda} = \left(\prod_{\lambda \in \mathrm{sp}(f)} \lambda^{\dim E_\lambda} \right)^n = \det(f)^n.$$

III — Formes linéaires sur $\mathscr{L}(E)$

Le but de cette partie est de déterminer l'ensemble $\mathscr{E}^\star = \mathscr{L}(E)^\star$ des formes linéaires sur l'espace $\mathscr{E} = \mathscr{L}(E)$ des endomorphismes de E. Pour $\ell \in E^\star$ et $v \in E$, on définit l'application $\Psi_{\ell,v} \colon \mathscr{E} \to \mathrm{K}$ par

$$\Psi_{\ell,v}(g) = \ell(g(v)), \quad g \in \mathscr{E}.$$

18. Montrer que $\Psi_{\ell,v} \in \mathscr{E}^\star$ pour tous $\ell \in E^\star$ et $v \in E$.

Solution. Soient $g, h \in \mathscr{E}$ et $\alpha, \beta \in \mathrm{K}$. On a

$$\Psi_{\ell,v}(\alpha g + \beta h) = \ell((\alpha g + \beta h)(v)) = \ell(\alpha g(v) + \beta h(v)) = \alpha \ell(g(v)) + \beta \ell(h(v)) = \alpha \Psi_{\ell,v}(g) + \beta \Psi_{\ell,v}(h).$$

19. En utilisant les questions **??** et **??**, montrer que pour tous $\ell \in E^\star$, $v \in E$ et $g \in \mathscr{E}$, on a

$$\Psi_{\ell,v}(g) = \mathrm{tr}(\Gamma_g(\Phi_{\ell,v})) = \mathrm{tr}(g \circ \Phi_{\ell,v}) = \mathrm{tr}(\Phi_{\ell,v} \circ g)$$

Solution. Soient $\ell \in E^\star$, $v \in E$ et $g \in \mathscr{E}$. Par la question **??**, on a

$$\Gamma_g(\Phi_{\ell,v}) = g \circ \Phi_{\ell,v} = \Phi_{\ell,g(v)}.$$

Par la question **??**, on a

$$\mathrm{tr}(\Gamma_g(\Phi_{\ell,v})) = \mathrm{tr}(\Phi_{\ell,g(v)}) = \ell(g(v)) = \Psi_{\ell,v}(g).$$

Enfin $\mathrm{tr}(h \circ g) = \mathrm{tr}(g \circ h)$ pour tous $g, h \in \mathscr{E}$, d'où l'on tire

$$\mathrm{tr}(g \circ \Phi_{\ell,v}) = \mathrm{tr}(\Phi_{\ell,v} \circ g).$$

20. Soient $\beta = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $\beta^\star = (e_1^\star, \dots, e_n^\star)$ sa base duale. Montrer que la famille $\left(\Psi_{e_i^\star, e_j}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ de $\mathscr{E}^\star$ est la base duale de la base $\left(\Phi_{e_i^\star, e_j}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ de $\mathscr{E}$.

Solution. Soient $i, j, k, l \in \{1, \dots, n\}$. On a

$$\begin{aligned} \Psi_{e_i^\star, e_j}(\Phi_{e_k^\star, e_l}) &= e_i^\star(\Phi_{e_k^\star, e_l}(e_j)) \\ &= e_i^\star(e_k^\star(e_j) e_l) \\ &= e_k^\star(e_j) e_i^\star(e_l) \\ &= \delta_{j,k}\delta_{i,l}. \end{aligned}$$

Ainsi $\Psi_{e_i^\star, e_j}(\Phi_{e_k^\star, e_l}) = 1$ si $(i, j) = (k, l)$ et $\Psi_{e_i^\star, e_j}(\Phi_{e_k^\star, e_l}) = 0$ sinon.

21. Déduire des deux questions précédentes que pour toute forme linéaire $\Psi \in \mathscr{E}^\star$, il existe $f \in \mathscr{E}$ tel que pour tout $g \in \mathscr{E}$, on a

$$\Psi(g) = \operatorname{tr}(f \circ g).$$

Solution. Soit $\Psi \in \mathscr{E}^\star$. Par la question précédente, il existe des scalaires $a_{i,j} \in \mathrm{K}$ tels que

$$\Psi = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \Psi_{e_i^\star, e_j}.$$

On pose alors

$$f = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \Phi_{e_i^\star, e_j} \in \mathscr{E}.$$

Alors, pour tout $g \in \mathscr{E}$, on a

$$\begin{aligned} \Psi(g) &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \Psi_{e_i^\star, e_j}(g) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \operatorname{tr}(\Phi_{e_i^\star, e_j} \circ g) \\ &= \operatorname{tr}\left(\left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \Phi_{e_i^\star, e_j}\right) \circ g\right) \\ &= \operatorname{tr}(f \circ g), \end{aligned}$$

où la deuxième égalité vient de la question **??**.

22. En déduire que l'application $\Upsilon \colon \mathscr{E} \to \mathscr{E}^\star$ donnée par

$$\Upsilon(f)(g) = \operatorname{tr}(f \circ g), \quad f, g \in \mathscr{E},$$

est un isomorphisme de K-espaces vectoriels.

Solution. Par la question précédente, l'application Υ est surjective. Mais $\dim \mathscr{E} = \dim \mathscr{E}^\star$ donc Υ est un isomorphisme.

⋆ ⋆ ⋆