Université de Nantes Année 2025-2026
XLG5MU010 - Algèbre et Géométrie I

Problème de révision

Le but de ce problème est de réviser quelques notions d'algèbre linéaire. Dans toute la suite, on note $\mathrm{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et on se donne un K-espace vectoriel E de dimension finie $n \geqslant 1$. On note $E^\star$ l'espace dual de E. On note $\mathscr{L}(E)$ l'espace des applications linéaires de E dans E. Pour $f \in \mathscr{L}(E)$ et $\beta = (v_1, \dots, v_n)$ et $\gamma = (w_1, \dots, w_n)$ sont des bases de E, on note ${}_\gamma[f]_\beta$ la matrice de f de la base β vers la base γ, c'est-à-dire la matrice dont les coefficients $a_{i,j}$ vérifient

$$f(v_k) = \sum_{j=1}^{n} a_{j,k} w_j.$$

On notera simplement $[f]_\beta = {}_\beta[f]_\beta$ la matrice de f dans la base β. On note $\det(f)$ (resp. $\mathrm{tr}(f)$) le déterminant de f (resp. la trace de f), c'est-à-dire qu'on a

$$\det(f) = \det([f]_\beta) \quad \text{et} \quad \mathrm{tr}(f) = \mathrm{tr}([f]_\beta),$$

pour une base quelconque β de E (les définitions ne dépendent pas du choix de la base).

Enfin, pour tous $\ell \in E^\star$ et $x \in E$, on note $\Phi_{\ell,v} \colon E \to E$ l'application définie par

$$\Phi_{\ell,v}(x) = \ell(x)v, \quad x \in E.$$

I — Endomorphismes de rang 1

1. Dans cette question on fixe $\ell \in E^\star$ et $v \in E$.

(i) Montrer que $\Phi_{\ell,v} \in \mathscr{L}(E)$ et que $\Phi_{\ell,v} = 0$ si et seulement si $\ell = 0$ ou $v = 0$.

(ii) On suppose $\Phi_{\ell,v} \neq 0$. Montrer que $\Phi_{\ell,v}$ est de rang 1, c'est-à-dire que $\dim \mathrm{Im}(\Phi_{\ell,v}) = 1$.

2. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme de rang 1.

(i) Soit $H = \ker(f)$. Montrer qu'il existe $\ell \in E^\star$ telle que $H = \ker \ell$.

(ii) Soit $w \in E$ non nul tel que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{K}w$. Soit $\eta \in E^\star$ telle que $\eta(w) = 1$. Montrer que

$$\ker f^\top(\eta) \supset \ker \ell$$

et en déduire qu'il existe $\alpha \in \mathrm{K}$ tel que $f^\top(\eta) = \alpha\ell$.

(iii) On pose $v = \alpha w$. Montrer que pour tout $x \in E$ on a $f(x) - \Phi_{\ell,v}(x) \in \ker \eta \cap \mathrm{K}w$ et en déduire que

$$f = \Phi_{\ell,v}.$$

3. Soient $\ell \in E^\star$ et $v \in E$ non nul. On complète v en une base $\beta = (v, e_2, \dots, e_n)$ de E. Montrer

$$[\Phi_{\ell,v}]_\beta = \begin{pmatrix} \ell(v) & \ell(e_2) & \cdots & \ell(e_n) \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

et en déduire que $\mathrm{tr}(\Phi_{\ell,v}) = \ell(v)$. Montrer que cette identité reste vraie lorsque $v = 0$.

4. Soient $\ell, \eta \in E^\star$ et $v, w \in E$. Montrer que

$$\Phi_{\eta,w} \circ \Phi_{\ell,v} = \eta(v)\Phi_{\ell,w}.$$

5. En appliquant la question précédente avec $\ell = \eta$ et $v = w$, et en utilisant les questions **????** et **??**, montrer que pour tout endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$ de rang 1, on a

$$f^2 = \operatorname{tr}(f)f.$$

6. Soient $\beta = (v_1, \dots, v_n)$ et $\gamma = (w_1, \dots, w_n)$ deux bases de E. On note $\beta^\star = (v_1^\star, \dots, v_n^\star)$ et $\gamma^\star = (w_1^\star, \dots, w_n^\star)$ leurs bases duales. On se donne $f \in \mathscr{L}(E)$ et on note $A = (a_{i,j}) = {}_\gamma[f]_\beta$.

(i) Montrer que pour tous $i, j, k = 1, \dots, n$ on a $\Phi_{v_i^\star, w_j}(v_k) = \delta_{i,k} w_j$ où $\delta_{i,k} = 1$ si $i = k$ et $\delta_{i,k} = 0$ sinon.

(ii) En déduire que pour tout $k = 1, \dots, n$, on a

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j} \Phi_{v_i^\star, w_j}(v_k) = \sum_{j=1}^n a_{j,k} w_j.$$

(iii) En déduire que $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j} \Phi_{v_i^\star, w_j} = f$.

(iv) Montrer que la famille $\left(\Phi_{v_i^\star, w_j}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est une base de $\mathscr{L}(E)$.

7. Montrer que pour toute base $(v_1, \dots, v_n)$, on a $\operatorname{Id}_E = \sum_{i=1}^n \Phi_{v_i^\star, v_i}$ où $(v_1^\star, \dots, v_n^\star)$ est la base duale de $(v_1, \dots, v_n)$.

8. Soient $\ell \in E^\star$ et $v \in E$, tous deux non nuls.

(i) Montrer que $(\Phi_{\ell,v})^2 = \ell(v)\Phi_{\ell,v}$ et calculer le polynôme minimal de $\Phi_{\ell,v}$.

(ii) On suppose $\ell(v) \neq 0$. Montrer que $\Phi_{\ell,v}$ est diagonalisable, calculer ses valeurs propres et déterminer les sous-espaces propres associés.

(iii) On suppose $\ell(v) = 0$. Montrer que $\Phi_{\ell,v}$ n'est pas diagonalisable et qu'il existe une base β de E telle que

$$[\Phi_{\ell,v}]_\beta = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in M_n(\mathrm{K}).$$

II — Opérateurs de composition

Dans cette partie on fixe $f \in \mathscr{L}(E)$. Par souci de simplicité on notera $\mathscr{E} = \mathscr{L}(E)$. On définit l'application $\Gamma_f : \mathscr{E} \to \mathscr{E}$ par

$$\Gamma_f(g) = f \circ g, \quad g \in \mathscr{E}.$$

9. Montrer que $\Gamma_f \in \mathscr{L}(\mathscr{E})$ et donner $\dim \mathscr{L}(\mathscr{E})$. Ainsi, $\Gamma_f \in \mathscr{L}(\mathscr{L}(E))$ est un endomorphisme de l'espace des endomorphismes de E.

10. Montrer que pour tous $\ell \in E^\star$ et $v \in E$, on a $\Gamma_f(\Phi_{\ell,v}) = \Phi_{\ell,f(v)}$.

11. On se donne une base $\beta = (v_1, \dots, v_n)$ de E et une base $(\ell_1, \dots, \ell_n)$ de $E^\star$. Montrer que

$$\Gamma_f(\Phi_{\ell_i,v_j}) = \sum_{k=1}^n a_{k,j} \Phi_{\ell_i,v_k}, \quad i, j = 1, \dots, n,$$

où $A = (a_{i,j}) = [f]_\beta$ est la matrice de f dans la base β.

12. En déduire, en utilisant la question **????**, que $\mathrm{tr}(\Gamma_f) = n\,\mathrm{tr}(f)$.

Pour tout $\lambda \in \mathrm{K}$ on note E_λ (respectivement C_λ) le sous-espace propre de f (respectivement le sous-espace caractéristique de f) associé à λ. On note aussi $\mathscr{E}_\lambda$ (respectivement $\mathscr{C}_\lambda$) le sous-espace propre de Γ_f (respectivement le sous-espace caractéristique de Γ_f) associé à λ.

13. Montrer que pour tout $P \in \mathrm{K}[X]$, on a $P(\Gamma_f)(g) = P(f) \circ g$ pour tout $g \in \mathscr{E}$.

14. Montrer que pour tout $g \in \mathscr{E}$, on a $P(\Gamma_f)(g) = 0$ si et seulement si $\mathrm{Im}(g) \subset \ker(P(f))$.

15. Soit $M \subset E$ un sous-espace et $\mathscr{F}_M = \{g \in \mathscr{E} \mid \mathrm{Im}(g) \subset M\}$. Montrer que $\mathscr{F}_M$ est un sous-espace de $\mathscr{E}$ de dimension $n \dim M$.

16. En déduire que pour tout $\lambda \in \mathrm{K}$, on a $\dim \mathscr{E}_\lambda = n \dim E_\lambda$ et $\dim \mathscr{C}_\lambda = n \dim C_\lambda$.
Indication. Pour la deuxième égalité, on pourra utiliser le fait que pour tous $r \in \mathbb{N}$ *et* $\lambda \in \mathrm{K}$, *on a* $\ker(\Gamma_f - \lambda \mathrm{Id}_{\mathscr{E}})^r = \mathscr{F}_M$ *avec* $M = \ker(f - \lambda \mathrm{Id}_E)^r$.

17. Montrer que f est diagonalisable si et seulement si Γ_f est diagonalisable. Montrer que dans ce cas, on a $\det \Gamma_f = \det(f)^n$.

III — Formes linéaires sur $\mathscr{L}(E)$

Le but de cette partie est de déterminer l'ensemble $\mathscr{E}^\star = \mathscr{L}(E)^\star$ des formes linéaires sur l'espace $\mathscr{E} = \mathscr{L}(E)$ des endomorphismes de E. Pour $\ell \in E^\star$ et $v \in E$, on définit l'application $\Psi_{\ell,v} \colon \mathscr{E} \to \mathrm{K}$ par

$$\Psi_{\ell,v}(g) = \ell(g(v)), \quad g \in \mathscr{E}.$$

18. Montrer que $\Psi_{\ell,v} \in \mathscr{E}^\star$ pour tous $\ell \in E^\star$ et $v \in E$.

19. En utilisant les questions **??** et **??**, montrer que pour tous $\ell \in E^\star$, $v \in E$ et $g \in \mathscr{E}$, on a

$$\Psi_{\ell,v}(g) = \mathrm{tr}(\Gamma_g(\Phi_{\ell,v})) = \mathrm{tr}(g \circ \Phi_{\ell,v}) = \mathrm{tr}(\Phi_{\ell,v} \circ g)$$

20. Soient $\beta = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et $\beta^\star = (e_1^\star, \ldots, e_n^\star)$ sa base duale. Montrer que la famille $\left(\Psi_{e_i^\star, e_j}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ de $\mathscr{E}^\star$ est la base duale de la base $\left(\Phi_{e_i^\star, e_j}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ de $\mathscr{E}$.

21. Déduire des deux questions précédentes que pour toute forme linéaire $\Psi \in \mathscr{E}^\star$, il existe $f \in \mathscr{E}$ tel que pour tout $g \in \mathscr{E}$, on a

$$\Psi(g) = \mathrm{tr}(f \circ g).$$

22. En déduire que l'application $\Upsilon \colon \mathscr{E} \to \mathscr{E}^\star$ donnée par

$$\Upsilon(f)(g) = \mathrm{tr}(f \circ g), \quad f, g \in \mathscr{E},$$

est un isomorphisme de K-espaces vectoriels.

⋆ ⋆ ⋆