Université de Nantes Année 2025–2026
Département de Mathématiques Licence 3–XLG5MU010

Algèbre et Géométrie I — CC du 3 décembre 2026

Durée 2h. Le sujet est recto-verso

Documents, calculatrices, téléphones portables ou autres appareils électroniques interdits.

La qualité de la rédaction est un facteur important dans l'appréciation des copies. Vous êtes donc invités à produire des raisonnements clairs, complets et concis. Vous pouvez à chaque instant utiliser un résultat énoncé dans une question ou une partie précédente, en veillant cependant à bien en indiquer la référence.

1. (Questions de cours) Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E)$.

   (a) Donner un des critères de trigonalisabilité de f. [1]

   > **Solution:** L'endomorphisme f est trigonalisable si, et seulement si, son polynôme caractéristique est scindé sur K.

   (b) Définir l'espace caractéristique associé à une valeur propre de f. [1]

   > **Solution:** Pour une valeur propre $\lambda \in K$, l'espace caractéristique associé à λ est le sous-espace vectoriel $C_\lambda \subset E$ défini par
   > $$C_\lambda = \operatorname{Ker}\left((f - \lambda \operatorname{Id}_E)^{m_f^{alg}(\lambda)}\right).$$
   > où $m_f^{alg}(\lambda)$ est la multiplicité algébrique de λ.

   (c) Définir une application linéaire naturelle $\varphi : E \to E^{**}$. Que peut-on dire de φ ? [1]

   > **Solution:** Pour $x \in E$, on définit *l'évaluation en x*, notée $ev_x : E^* \to K$, par $\ell \mapsto \ell(x)$. On définit alors l'application φ par
   > $$\varphi : E \to E^{**}, \quad x \mapsto ev_x.$$
   > L'application $\varphi : E \to E^{**}$ est linéaire et, lorsque E est de dimension finie, c'est un isomorphisme.

2. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorphisme dont la matrice dans la base canonique est
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

   (a) Calculer le polynôme caractéristique χ_f de f. [½]

Solution: Le polynôme caractéristique est donné par

$$\chi_f(X) = \det(XI_3 - A) = \det \begin{pmatrix} X-2 & 0 & -1 \\ 0 & X-1 & 0 \\ -1 & 0 & X-2 \end{pmatrix}.$$

En développant selon la deuxième ligne, on obtient

$$\chi_f(X) = (X-1)\det \begin{pmatrix} X-2 & -1 \\ -1 & X-2 \end{pmatrix} = (X-1)^2(X-3).$$

Remarque : *Parfois,* $\det(A - XI_3)$ *était calculé et accepté comme réponse. Cela conduit au même résultat sur les racines avec un signe global différent.*

(b) Déterminer les valeurs propres de f et les sous-espaces propres associés. [1]

Solution: Les valeurs propres sont les racines du polynôme caractéristique, à savoir 1 et 3. Pour $\lambda = 1$, on trouve

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$E_1 = \mathrm{Ker}(A - I_3) = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + z = 0\big\} = \mathrm{Vect}\{(-1,0,1),(0,1,0)\}$$

Pour $\lambda = 3$, on trouve

$$A - 3I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$E_3 = \mathrm{Ker}(A - 3I_3) = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = z, y = 0\big\} = \mathrm{Vect}\{(1,0,1)\}.$$

(c) Est-ce f est diagonalisable ? Si oui, déterminer une base de vecteurs propres et donner la matrice de f dans cette base et la matrice de passage P de la base canonique vers cette nouvelle base. [1]

Solution: D'après la question précédente, les valeurs propres sont 1 et 3 avec des sous-espaces propres de dimensions respectives 2 et 1. Ainsi, le polynôme caractéristique est scindé et les multiplicités géométriques coïncident avec les multiplicités algébriques. D'après un critère de diagonalisabilité du cours, f est donc diagonalisable.

Toujours d'après le cours, une base de vecteurs propres est donnée par la

réunion des bases des sous-espaces propres associés aux valeurs propres. Ainsi $\{(-1,0,1),(0,1,0),(1,0,1)\}$ est une base de vecteurs propres.
La matrice de f dans cette base est diagonale avec les valeurs propres sur la diagonale :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

La matrice de passage P de la base canonique vers cette nouvelle base est formée par les vecteurs propres en colonnes :

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi $D = P^{-1}AP$.

(d) Quel est le polynôme minimal de f ? [½]

Solution: D'après un critère de diagonalisabilité du cours (critère III), f est diagonalisable si, et seulement si, son polynôme minimal est scindé à racines simples. D'après la question précédente, le polynôme minimal est donc

$$\mu_f(X) = (X-1)(X-3).$$

Remarque : *On attendait ici simplement l'utilisation du critère, se basant sur la diagonalisabilité de f montrée à la question précédente. Parfois il était directement montré que mu_f annule f, ce qui était bien entendu tout aussi correct.*

(e) Déterminer toutes les matrices qui commutent avec A. [2]

Solution: On cherche toutes les matrices X qui commutent avec A, c'est-à-dire telles que $AX = XA$. On va chercher les matrices Y qui commutent avec D. En effet, X commute avec A, si, et seulement si, $Y = P^{-1}XP$ commute avec D :

$$\begin{aligned} AX = XA &\iff PDP^{-1}X = XPDP^{-1} \\ &\iff P^{-1}PDP^{-1}XP = P^{-1}XPD \\ &\iff D(P^{-1}XP) = (P^{-1}XP)D \\ &\iff DY = YD \end{aligned}$$

On écrit donc :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

On en déduit, par un calcul simple, que cela impose que Y est de la forme

$$\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ d & e & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}, \quad (a, b, d, e, i \in \mathbb{R}).$$

Ainsi, les matrices qui commutent avec A sont les X telles que $X = PYP^{-1}$. On obtient, par calcul matriciel,

$$X = \begin{pmatrix} \frac{a+i}{2} & -b & \frac{-a+i}{2} \\ -\frac{1}{2}d & e & \frac{1}{2}d \\ \frac{-a+i}{2} & b & \frac{a+i}{2} \end{pmatrix}, \quad (a, b, d, e, i) \in \mathbb{R}.$$

puis quitte à renommer les paramètres, les matrices qui commutent avec A sont celles de la forme

$$\begin{pmatrix} a & b & i \\ d & e & -d \\ i & -b & a \end{pmatrix}, \quad (a, b, d, e, i) \in \mathbb{R}.$$

Remarque : *On attendait ici la détermination de Y puis de $X = PYP^{-1}$. On pouvait aussi raisonner directement sur A mais cela demandait un peu plus de calculs.*

3. Déterminer toutes les matrices de $M_4(\mathbb{C})$ dont le polynôme minimal est [2]

$$\mu_A(X) = X^2 - 1.$$

Solution: Le polynôme minimal $\mu_A(X) = X^2 - 1 = (X-1)(X+1)$ est scindé à racines simples. D'après un critère de diagonalisabilité du cours, A est donc diagonalisable.

Ainsi, il existe une base de $\mathbb{C}^4$ dans laquelle la matrice de A est diagonale avec uniquement les valeurs propres 1 et -1.

Soit k le nombre de fois que 1 apparaît sur la diagonale. Alors -1 apparaît $4-k$ fois. Le polynôme minimal étant $(X-1)(X+1)$, les deux valeurs propres doivent apparaître au moins une fois. Donc k peut prendre les valeurs $1, 2, 3$.

Par conséquent, les matrices de $M_4(\mathbb{C})$ dont le polynôme minimal est $X^2 - 1$ sont celles qui sont semblables aux matrices diagonales suivantes :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

4. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{C}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Déterminer les valeurs propres de f, ainsi que leurs multiplicités algébriques et géométriques. [1]

Solution: Le polynôme caractéristique de f est

$$\chi_f(X) = \det(XI_3 - A) = \det \begin{pmatrix} X-4 & -1 & 0 \\ 0 & X-4 & 0 \\ -2 & 0 & X-1 \end{pmatrix}.$$

En développant selon la deuxième ligne, on obtient

$$\chi_f(X) = (X-4)\det \begin{pmatrix} X-4 & 0 \\ -2 & X-1 \end{pmatrix} = (X-4)^2(X-1).$$

Ainsi, les valeurs propres de f sont 4 et 1 avec des multiplicités algébriques respectives 2 et 1. Pour la valeur propre 4, on trouve

$$A - 4I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Le sous-espace propre associé est donc

$$E_4 = \operatorname{Ker}(A - 4I_3) = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \mid y = 0, 2x - 3z = 0\right\} = \operatorname{Vect}\{(3, 0, 2)\}.$$

La multiplicité géométrique de la valeur propre 4 est donc 1. Pour la valeur propre 1, on trouve

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le sous-espace propre associé est donc

$$E_1 = \mathrm{Ker}(A - I_3) = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \mid 3x + y = 0, 2x = 0\big\} = \mathrm{Vect}\{(0, 0, 1)\}.$$

La multiplicité géométrique de la valeur propre 1 est donc 1.

(b) Construire une base de $\mathbb{C}^3$ dans laquelle la matrice de f est [1]

$$J = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Solution: Puisque la valeur propre 4 a une multiplicité algébrique de 2 et une multiplicité géométrique de 1, pour construire une base adaptée, nous partons du vecteur propre associé à la valeur propre 4,

$$v_1 = (3, 0, 2),$$

puis nous cherchons un vecteur v_2 tel que $(A - 4I_3)v_2 = v_1$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

En résolvant ce système, on trouve $y = 3$ et $2x - 3z = 2$. En choisissant $z = 0$, on obtient $x = 1$. Ainsi, un choix possible pour v_2 est

$$v_2 = (1, 3, 0).$$

Pour la valeur propre 1, nous avons déjà le vecteur propre :

$$v_3 = (0, 0, 1).$$

Si P est la matrice dont les colonnes sont v_1, v_2, v_3, alors $P^{-1}AP = J$. Ainsi, une base de $\mathbb{C}^3$ dans laquelle la matrice de f est J est donnée par

$$\{v_1, v_2, v_3\} = \{(3, 0, 2), (1, 3, 0), (0, 0, 1)\}.$$

(c) Monter que la décomposition de Dunford de J est [1]

$$J = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Solution: La décomposition de Dunford d'une matrice (trigonalisable) M est l'unique écriture de M sous la forme

$$M = M_s + M_n,$$

où M_s est diagonalisable, M_n est nilpotente, et $M_s M_n = M_n M_s$. Pour la matrice J, si

$$J_s = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad J_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

alors J_s est diagonale (donc en particulier diagonalisable), la matrice J_n est nilpotente d'ordre 2, puisque

$$J_n^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

et de plus, l'on a $J_s J_n = J_n J_s$:

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi, $J = J_s + J_n$ est bien la décomposition de Dunford de J.

Remarque : *On attendait ici la vérification explicite des propriétés de la décomposition de Dunford et en particulier la commutation entre J_s et J_n.*

(d) En déduire celle de A. [1]

Solution: Pour obtenir la décomposition de Dunford de A, nous utilisons la matrice de passage P de la base canonique à la base dans laquelle A est sous forme de Jordan J. La décomposition de Dunford de A est alors donnée par

$$A = A_s + A_n,$$

où $A_s := PJ_sP^{-1}$ et $A_n := PJ_nP^{-1}$. En effet, A_s est diagonalisable puisque semblable à une matrice diagonale, et A_n est nilpotente d'ordre 2 puisque $A_n^2 = PJ_nP^{-1}PJ_nP^{-1} = 0$. De plus, on a

$$A_sA_n = PJ_sP^{-1}PJ_nP^{-1} = PJ_sJ_nP^{-1} = PJ_nJ_sP^{-1} = PJ_nP^{-1}PJ_sP^{-1} = A_nA_s$$

Les propriétés de la décomposition de Dunford sont vérifiées. Par un calcul matriciel, on trouve

$$A = PJ_sP^{-1} + PJ_nP^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & -\frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Remarque : *On attendait ici la vérification des propriétés ci-dessus de la décomposition de Dunford et en particulier la commutation entre A_s et A_n, puis le calcul de A. Parfois, la décomposition "rapide" suivante était donnée :*

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La première matrice est bien diagonalisable (on pourra vérifier que l'espace propre pour la valeur propre 4 est de dimension 2), et la seconde matrice est bien nilpotente, mais les deux matrices ne commutent pas.

(e) Calculer A^k pour tout $k \geq 0$. [2]

Solution: Pour toute puissance $k \in \mathbb{N}$ on a

$$A^k = \left(PJP^{-1}\right)^k = PJ^kP^{-1},$$

car les P et P^{-1} se simplifient en chaîne. Il est plus facile de calculer J^k. On reprend la décomposition de Dunford de J :

$$J = J_s + J_n.$$

Nous avons $J_sJ_n = J_nJ_s$, donc par la formule du binôme de Newton,

$$J^k = (J_s + J_n)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} J_s^{k-i} J_n^i.$$

Or, J_n est nilpotente d'ordre 2, donc $J_n^2 = 0$. Ainsi, la formule précédente se simplifie en

$$J^k = J_s^k + kJ_s^{k-1}J_n.$$

Calculons J_s^k et $J_s^{k-1}J_n$:

$$J_s^k = \begin{pmatrix} 4^k & 0 & 0 \\ 0 & 4^k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad J_s^{k-1}J_n = \begin{pmatrix} 0 & 4^{k-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Donc,

$$J^k = \begin{pmatrix} 4^k & k4^{k-1} & 0 \\ 0 & 4^k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Finalement,

$$A^k = PJ^kP^{-1} = P \begin{pmatrix} 4^k & k4^{k-1} & 0 \\ 0 & 4^k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}.$$

On obtient, par calcul matriciel simple la formule finale :

$$A^k = \begin{pmatrix} 4^k & k4^{k-1} & 0 \\ 0 & 4^k & 0 \\ \frac{2}{3}(4^k - 1) & \frac{2}{9}((3k-4)4^{k-1}+1) & 1 \end{pmatrix}.$$

Remarque : *On attendait ici la justification de l'utilisation de la formule de Newton, i.e. que J_s et J_n commutent. Puis, on attendait au moins le calcul explicit de J^k. Si l'on raisonnait directement sur A, on attendait de même la justification de l'utilisation de la formule de Newton, puis la formule $A^k = A_s^k + kA_s^{k-1}A_n$, mais A^k devait être donné explicitement dans ce cas.*

5. Soit E un espace vectoriel complexe de dimension finie soient $u, v \in \mathscr{L}(E)$. On suppose que $u \circ v = v \circ u$.

   (a) Monter que $u^k \circ v = v \circ u^k$ pour tout entier $k \geq 0$. [1/2]

Solution: La propriété est évidente pour $k = 0$ car $u^0 = \mathrm{Id}_E$ et donc $\mathrm{Id}_E \circ v = v \circ \mathrm{Id}_E$. Supposons maintenant que la propriété est vraie pour un certain entier $k \geq 0$, c'est-à-dire que $u^k \circ v = v \circ u^k$ et montrons qu'elle est vraie pour $k+1$. En utilisant l'hypothèse de récurrence et le fait que $u \circ v = v \circ u$, nous avons

$$u^{k+1} \circ v = u^k \circ (v \circ u) = (u^k \circ v) \circ u = (v \circ u^k) \circ u = v \circ (u^k \circ u) = v \circ u^{k+1}.$$

Ainsi, par récurrence, la propriété est vraie pour tout entier $k \geq 0$.

   (b) En déduire que pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$, on a $P(u) \circ v = v \circ P(u)$. [1/2]

Solution: Soit $P(X) = \sum_{i=0}^n a_i X^i$ un polynôme de degré n avec $a_i \in \mathbb{C}$. Nous avons

$$P(u) \circ v = \left(\sum_{i=0}^n a_i u^i \right) \circ v = \sum_{i=0}^n a_i (u^i \circ v).$$

En utilisant le résultat de la partie précédente, nous savons que $u^i \circ v = v \circ u^i$ pour tout entier $i \geq 0$. Ainsi,

$$P(u) \circ v = \sum_{i=0}^n a_i (v \circ u^i) = v \circ \left(\sum_{i=0}^n a_i u^i \right) = v \circ P(u).$$

Par conséquent, pour tout polynôme P, nous avons $P(u) \circ v = v \circ P(u)$.

(c) Montrer que u est trigonalisable. En déduire que E est somme directe des sous-espaces caractéristiques de u. [1]

Solution: Puisque E est un espace vectoriel complexe de dimension finie, le polynôme caractéristique de u est scindé. Par un critère de trigonalisabilité du cours, u est trigonalisable. De plus, d'après un résultat du cours (2.3.5), E se décompose en somme directe des sous-espaces caractéristiques :

$$E = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{sp}(u)} C_\lambda,$$

où $\mathrm{sp}(u)$ est l'ensemble des valeurs propres de u et C_λ est le sous-espace caractéristique associé à la valeur propre λ.

(d) Montrer que chaque sous-espace caractéristique de u est stable par v. [2]

Solution: Soit λ une valeur propre de u et C_λ le sous-espace caractéristique associé. Par définition, $C_\lambda = \mathrm{Ker}((u - \lambda\,\mathrm{Id}_E)^m)$ où m est la multiplicité algébrique de λ. Soit $x \in C_\lambda$ et montrons que $v(x) \in C_\lambda$, c'est-à-dire que $(u - \lambda\,\mathrm{Id}_E)^m v(x) = 0$. En utilisant le fait que u et v commutent, nous avons, grâce à la partie (b),

$$(u - \lambda\,\mathrm{Id}_E)^m v(x) = v(u - \lambda\,\mathrm{Id}_E)^m x = v(0) = 0.$$

Ainsi, $v(x) \in C_\lambda$, ce qui montre que C_λ est stable par v.

Remarque : *Les exercices (a) et (b) étaient décomposés en deux courts exercices pour donner une indication comment démontrer $P(u) \circ v = v \circ P(u)$ rigoureusement. La question (c) était une application directe du cours, et faisait référence, pour la trigonalisabilité de u, à la question de cours 1(a). Pour la stabilité des sous-espaces caractéristiques par v, seul exercice un peu théorique du sujet, il suffisait d'utiliser la partie (b) et la définition des sous-espaces caractéristiques qui était le sujet de la question de cours 1(b).*

Question:	1	2	3	4	5	Total
Points:	3	5	2	6	4	20
Score:						