Université de Nantes
Département de Mathématiques

Année 2025–2026
Licence 3–XLG5MU010

Algèbre et Géométrie I — CC du 3 décembre 2026

Durée 2h. Le sujet est recto-verso

Documents, calculatrices, téléphones portables ou autres appareils électroniques interdits.

La qualité de la rédaction est un facteur important dans l'appréciation des copies. Vous êtes donc invités à produire des raisonnements clairs, complets et concis. Vous pouvez à chaque instant utiliser un résultat énoncé dans une question ou une partie précédente, en veillant cependant à bien en indiquer la référence.

1. (Questions de cours) Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E)$.
   (a) Donner un des critères de trigonalisabilité de f.
   (b) Définir l'espace caractéristique associé à une valeur propre de f.
   (c) Définir une application linéaire naturelle $\varphi : E \to E^{**}$. Que peut-on dire de φ ?
2. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorphisme dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

   (a) Calculer le polynôme caractéristique χ_f de f.
   (b) Déterminer les valeurs propres de f et les sous-espaces propres associés.
   (c) Est-ce f est diagonalisable ? Si oui, déterminer une base de vecteurs propres et donner la matrice de f dans cette base et la matrice de passage P de la base canonique vers cette nouvelle base.
   (d) Quel est le polynôme minimal de f ?
   (e) Déterminer toutes les matrices qui commutent avec A.
3. Déterminer toutes les matrices de $M_4(\mathbb{C})$ dont le polynôme minimal est

$$\mu_A(X) = X^2 - 1.$$

4. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{C}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   (a) Déterminer les valeurs propres de f, ainsi que leurs multiplicités algébriques et géométriques.

(b) Construire une base de $\mathbb{C}^3$ dans laquelle la matrice de f est

$$J = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(c) Monter que la décomposition de Dunford de J est

$$J = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(d) En déduire celle de A.

(e) Calculer A^k pour tout $k \geq 0$.

5. Soit E un espace vectoriel complexe de dimension finie soient $u, v \in \mathscr{L}(E)$. On suppose que $u \circ v = v \circ u$.

(a) Monter que $u^k \circ v = v \circ u^k$ pour tout entier $k \geq 0$.

(b) En déduire que pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$, on a $P(u) \circ v = v \circ P(u)$.

(c) Montrer que u est trigonalisable. En déduire que E est somme directe des sous-espaces caractéristiques de u.

(d) Montrer que chaque sous-espace caractéristique de u est stable par v.