Université de Nantes Année 2025-2026
XLG5MU010 - Algèbre et Géométrie I

Contrôle continu 1

Durée : 2h. Tous les documents et appareils électroniques sont interdits. La qualité de la rédaction sera appréciée.

Question de cours (6 points)

Soit K $= \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $n \geqslant 1$ un entier et $E = K^n$.

1. (2 points) Donner la définition d'un cycle dans $\mathfrak{S}_n$.

2. (2 points) Donner la définition d'une forme n-linéaire alternée sur E.

3. (2 points) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Donner la définition de "u est diagonalisable".

Exercice 1 (3 points)

Soit $n \geqslant 1$ un entier. Décomposer les permutations suivantes en produit de cycles à supports disjoints, et calculer leur signature.

$$\textbf{1.} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & 2n-1 & 2n \\ 2n & 2n-1 & \cdots & 2 & 1 \end{pmatrix}; \quad \textbf{2.} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-2 & n-1 & n \\ n & 3 & 4 & \cdots & n-1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Solution. **1.** La permutation s'écrit comme le produit de n transpositions

$$(1 \;\; 2n) \;\cdots\; (n \;\; n+1).$$

Sa signature vaut donc $(-1)^n$.

2. La permutation s'écrit $(1 \;\; n)\ (2 \;\; 3 \;\; \cdots \;\; n-1)$. C'est le produit d'un cycle de longueur 2 et d'un cycle de longueur $n-2$, donc sa signature vaut $(-1) \times (-1)^{n-3} = (-1)^{n-2} = (-1)^n$.

Exercice 2 (7 points)

Le but de l'exercice est de montrer le résultat suivant.

Proposition (Inégalité de réarrangement). *Soient $n \geqslant 1$ un entier et $x_1, \dots, x_n$, $y_1, \dots, y_n$ des réels tels que*

$$x_1 < \cdots < x_n \quad \text{et} \quad y_1 < \cdots < y_n.$$

Alors pour toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n \setminus \{\mathrm{id}\}$, on a $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i y_{\sigma(i)} < \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$.

1. (1 point) Montrer la proposition pour $n = 2$.
Indication. On pourra considérer le produit $(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)$.

Solution. Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_2 \setminus \{\mathrm{id}\}$. *Alors* $\sigma = (1 \;\; 2)$. *Ainsi*

$$\sum_{i=1}^{2} x_i y_{\sigma(i)} = x_1 y_2 + x_2 y_1.$$

Or on a $0 < (x_2 - x_1)(y_2 - y_1) = x_1 y_1 + x_2 y_2 - x_1 y_2 - x_2 y_1$, *ce qui implique*

$$x_1 y_1 + x_2 y_2 > x_1 y_2 + x_2 y_1.$$

La proposition est donc démontrée pour $n = 2$.

2. On suppose à présent $n \geqslant 1$ quelconque et on se donne $\sigma \in \mathfrak{S}_n \setminus \{\mathrm{id}\}$.

a. (2 points) Montrer que le nombre d'inversions N_σ de σ est strictement positif.
Indication. On pourra remarquer que si $N_\sigma = 0$ *alors* $\sigma(1) < \cdots < \sigma(n)$.

Solution. On a $N_\sigma \geqslant 0$. *Si* $N_\sigma = 0$, *alors aucune paire n'est inversée par* σ, *si bien que* $\sigma(i) < \sigma(j)$ *pour tous* $i < j$. *Ceci implique immédiatement que*

$$\sigma(1) < \sigma(2) < \cdots < \sigma(n),$$

mais comme σ *est une bijection de* $\{1, \ldots, n\}$, *on obtient* $\sigma(i) = i$ *pour tout* $i = 1, \ldots, n$, *donc* $\sigma = \mathrm{id}$. *Par contraposée on obtient que* $N_\sigma > 0$ *pour toute* $\sigma \in \mathfrak{S}_n \setminus \{\mathrm{id}\}$.

On fixe à présent $i < j$ tels que la paire (i, j) est inversée par σ, c'est-à-dire que $\sigma(i) > \sigma(j)$. On note τ la permutation $\tau = (\sigma(i)\, \sigma(j))$, et on pose $\rho = \tau\sigma$.

b. (1 point) Montrer que $x_k y_{\rho(k)} = x_k y_{\sigma(k)}$ pour tout $k \neq i, j$.

Solution. Si $k \notin \{i, j\}$, *on a* $\sigma(k) \notin \{\sigma(i), \sigma(j)\} = \operatorname{supp} \tau$, *donc* $\rho(k) = \tau(\sigma(k)) = \sigma(k)$. *Par suite* $y_{\rho(k)} = y_{\sigma(k)}$ *et le résultat en découle.*

c. (1 point) En utilisant la question **??**, montrer que

$$x_i y_{\rho(i)} + x_j y_{\rho(j)} > x_i y_{\sigma(i)} + x_j y_{\sigma(j)}.$$

Déduire des deux questions précédentes que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k y_{\rho(k)} > \sum_{k=1}^{n} x_k y_{\sigma(k)}$.

Solution. Comme la paire (i, j) *est inversée par* σ, *on a* $\sigma(j) < \sigma(i)$ *et par conséquent on obtient*

$$x_i < x_j \quad \text{et} \quad y_{\sigma(j)} < y_{\sigma(i)}.$$

On applique la question ***1.*** *en remplaçant* x_1, x_2, y_1 *et* y_2 *respectivement par* $x_i, x_j, y_{\sigma(j)}$ *et* $y_{\sigma(i)}$ *; il vient*

$$x_i y_{\sigma(i)} + x_j y_{\sigma(j)} < x_i y_{\sigma(j)} + x_j y_{\sigma(i)}.$$

Mais $\sigma(j) = \rho(i)$ *et* $\sigma(i) = \rho(j)$ *par définition de* $\rho = \tau\sigma$, *donc on obtient bien*

$$x_i y_{\rho(i)} + x_j y_{\rho(j)} > x_i y_{\sigma(i)} + x_j y_{\sigma(j)}.$$

Par la question ***b.***, *on a*

$$\sum_{\substack{k=1\\k\neq i,j}}^{n} x_k y_\sigma(k) = \sum_{\substack{k=1\\k\neq i,j}}^{n} x_k y_\rho(k),$$

et en combinant cette égalité avec l'inégalité précédente on conclut finalement que

$$\sum_{k=1}^{n} x_k y_{\rho(k)} > \sum_{k=1}^{n} x_k y_{\sigma(k)}.$$

d. Conclure. (2 points)

Solution. On a montré que pour toute permutation $\sigma \neq \mathrm{id}$, il existe une permutation ρ telle que $A(\sigma) < A(\rho)$, où a on a noté

$$A(\sigma) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_{\sigma(i)}.$$

Soit $\omega \in \mathfrak{S}_n$ qui maximise la fonction $A : \mathfrak{S}_n \to \mathbb{R}$, i.e. telle que

$$A(\omega) = \max_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} A(\sigma).$$

Alors on affirme que $\omega = \mathrm{id}$. En effet, si ce n'était pas le cas, on pourrait trouver $\rho \in \mathfrak{S}_n$ telle que $A(\omega) < A(\rho)$, ce qui est absurde par maximalité de $A(\omega)$. Ainsi la permutation triviale est l'unique permutation qui maximise la fonction A, et par conséquent on obtient

$$A(\sigma) < A(\mathrm{id})$$

pour toute permutation $\sigma \neq \mathrm{id}$, ce qu'il fallait démontrer.

Exercice 3 (10 points)

Soit $n \geqslant 1$. On se donne $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ deux à deux distincts. On rappelle que

$$\det\big(\mathbf{V}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)\big) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (\lambda_j - \lambda_i) \quad \text{où} \quad \mathbf{V}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

1. (1 point) Montrer que le déterminant d'une matrice à coefficients entiers est un nombre entier.

Solution. Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{Z})$. Alors

$$\det A = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)} \in \mathbb{Z}.$$

En effet, pour toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ on a $\varepsilon(\sigma) \in \{-1, 1\}$, et comme les coefficients de A sont entiers, on obtient que $\varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}$ est un entier.

2. Soient $P_0, \dots, P_{n-1} \in \mathrm{K}[X]$ des polynômes unitaires, avec $\deg P_m = m$, qu'on écrit

$$P_m = \sum_{k=1}^{m} a_{m,k} X^{k-1} + X^m, \quad m = 0, \dots, n-1.$$

On note $\mathbf{A} \in \mathrm{M}_n(\mathrm{K})$ la matrice dont le coefficient en place (i, j) est $P_{i-1}(\lambda_j)$.

a. (2 points) Montrer que

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} P_0(\lambda_1) & \cdots & P_0(\lambda_n) \\ \vdots & & \vdots \\ P_{n-1}(\lambda_1) & \ldots & P_{n-1}(\lambda_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{1,1} & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,n-1} & 1 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{V}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n).$$

Solution. On note $\mathbf{B} = (b_{i,j})$ *la matrice à gauche du produit dans le membre de droite de l'égalité ci-dessus. Alors le coefficient en place* (i, j) *de* $\mathbf{B} \cdot \mathbf{V}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ *vaut*

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} b_{i,k} \lambda_j^{k-1}.$$

On a $b_{i,k} = a_{i,k}$ *pour tout* $k < i$ *et* $b_{i,i} = 1$*, ce qui donne*

$$c_{i,j} = a_{i,1} + a_{i,2}\lambda_j + \cdots + a_{i,i-1}\lambda_j^{i-2} + \lambda_j^{i-1} = P_{i-1}(\lambda_j),$$

ce qui coïncide avec le coefficient en place (i, j) *de* $\mathbf{A}$*.*

b. (1 point) En déduire la valeur de $\det(\mathbf{A})$.

Solution. La matrice $\mathbf{B}$ *est triangulaire inférieure, donc son déterminant est égal au produit de ses éléments diagonaux, soit* 1*. Par suite*

$$\det \mathbf{A} = \det(\mathbf{B} \cdot \mathbf{V}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)) = \det(\mathbf{B}) \det(V(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (\lambda_j - \lambda_i).$$

3. (2 points) On pose $H_0 = 1$ et $H_m = \frac{1}{m!} X(X-1)\cdots(X-m+1)$ pour tout $m = 1, \ldots, n-1$. En utilisant la question précédente, montrer que

$$\det(\mathbf{A}) = \left(\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (\lambda_j - \lambda_i) \right) \left(\prod_{m=0}^{n-1} m! \right)^{-1}$$

où $\mathbf{A} \in \mathrm{M}_n(\mathrm{K})$ la matrice dont le coefficient en place (i, j) est $H_{i-1}(\lambda_j)$.

Solution. Soit $\mathbf{A}$ *la matrice dont le coefficient en place* (i, j) *est* $H_{i-1}(\lambda_j)$*. On a* $P_m = m! H_m$ *où* P_m *est un polynôme unitaire de degré* m*. Ainsi, on a*

$$\widetilde{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 0! & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & (n-1)! \end{pmatrix} \cdot \mathbf{A},$$

où $\widetilde{\mathbf{A}}$ *est la matrice dont le coefficient en place* (i, j) *est* $P_{i-1}(\lambda_j)$*. En effet, multiplier* $\widetilde{\mathbf{A}}$ *par une matrice diagonale* $D = (d_{i,j})$ *revient à multiplier sa* i^{eme} *colonne par le coefficient* $d_{i,i}$*, pour tout* $i = 1, \ldots, n$*. Par la question précédente, on a* $\det \widetilde{\mathbf{A}} = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (\lambda_j - \lambda_i)$*, d'où l'on tire*

$$\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (\lambda_j - \lambda_i) = \left(\prod_{m=0}^{n-1} m! \right) \det \mathbf{A},$$

ce qui donne $\det \mathbf{A} = \left(\prod_{m=0}^{n-1} m! \right)^{-1} \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (\lambda_j - \lambda_i)$*.*

4. (2 points) On *admet* que $H_m(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$ pour tout $m = 0, \ldots, n-1$. Montrer en utilisant la question **1.** et la question précédente que pour tous entiers relatifs $k_1 < \cdots < k_n$ on a

$$\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \frac{k_j - k_i}{j - i} \in \mathbb{Z}.$$

Solution. Remarquons d'abord que

$$\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (j-i) = \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=i+1}^{n} (j-i) = \prod_{i=1}^{n} (n-i)! = \prod_{m=0}^{n-1} m!.$$

*Dès lors, en appliquant le résultat de la question **3.** avec $\lambda_j = k_j$ pour tout $j = 1, \ldots, n$, on obtient*

$$\det \mathbf{A} = \left(\prod_{m=0}^{n-1} m! \right)^{-1} \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (\lambda_j - \lambda_i) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \frac{k_j - k_i}{j - i}.$$

*En utilisant que $H_m(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$, on obtient que $\mathbf{A}$ est à coefficients entiers, et donc $\det \mathbf{A} \in \mathbb{Z}$ par la question **1.**, ce qui conclut.*

5. (Hors barème, 2 points) Montrer que $H_m(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$.

Solution. Si $m = 0$ ou $m = 1$, c'est clair. On se donne $m \geqslant 2$ un entier et $k \in \mathbb{Z}$. Si $k \in \{0, \ldots, m-1\}$, alors $H_m(k) = 0 \in \mathbb{Z}$. Si $k \geqslant m$, alors on a

$$H_m(k) = \frac{k(k-1)\cdots(k-m+1)}{m!} = \binom{k}{m} \in \mathbb{Z}.$$

Enfin $k < 0$, écrivons $k = -a$ avec $a > 0$. On a

$$H_m(k) = \frac{(-a)(-a-1)\cdots(-a-m+1)}{m!} = (-1)^m \frac{a(a+1)\cdots(a+m-1)}{m!} = \binom{a+m-1}{m} \in \mathbb{Z}.$$

⋆ ⋆ ⋆