Université de Nantes Année 2025-2026
XLG5MU010 - Algèbre et Géométrie I

Contrôle continu 1

Durée : 2h. Tous les documents et appareils électroniques sont interdits. La qualité de la rédaction sera appréciée.

Question de cours

Soit K $= \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $n \geqslant 1$ un entier et $E = K^n$.

1. Donner la définition d'un cycle dans $\mathfrak{S}_n$.

2. Donner la définition d'une forme n-linéaire alternée sur E.

3. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Donner la définition de "u est diagonalisable".

Exercice 1

Soit $n \geqslant 1$ un entier. Décomposer les permutations suivantes en produit de cycles à supports disjoints, et calculer leur signature.

$$\textbf{1. } \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & 2n-1 & 2n \\ 2n & 2n-1 & \cdots & 2 & 1 \end{pmatrix}; \quad \textbf{2. } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-2 & n-1 & n \\ n & 3 & 4 & \cdots & n-1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2

Le but de l'exercice est de montrer le résultat suivant.

Proposition (Inégalité de réarrangement). *Soient $n \geqslant 1$ un entier et $x_1, \dots, x_n$, $y_1, \dots, y_n$ des réels tels que*

$$x_1 < \cdots < x_n \quad \text{et} \quad y_1 < \cdots < y_n.$$

Alors pour toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n \setminus \{\mathrm{id}\}$, on a $\displaystyle\sum_{i=1}^n x_i y_{\sigma(i)} < \sum_{i=1}^n x_i y_i$.

1. Montrer la proposition pour $n = 2$.
Indication. On pourra considérer le produit $(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)$.

2. On suppose à présent $n \geqslant 1$ quelconque et on se donne $\sigma \in \mathfrak{S}_n \setminus \{\mathrm{id}\}$.

a. Montrer que le nombre d'inversions N_σ de σ est strictement positif.
Indication. On pourra remarquer que si $N_\sigma = 0$ alors $\sigma(1) < \cdots < \sigma(n)$.

On fixe à présent $i < j$ tels que la paire (i, j) est inversée par σ, c'est-à-dire que $\sigma(i) > \sigma(j)$. On note τ la permutation $\tau = (\sigma(i)\,\sigma(j))$, et on pose $\rho = \tau\sigma$.

b. Montrer que $x_k y_{\rho(k)} = x_k y_{\sigma(k)}$ pour tout $k \neq i, j$.

c. En utilisant la question **??**, montrer que

$$x_i y_{\rho(i)} + x_j y_{\rho(j)} > x_i y_{\sigma(i)} + x_j y_{\sigma(j)}.$$

Déduire des deux questions précédentes que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k y_{\rho(k)} > \sum_{k=1}^{n} x_k y_{\sigma(k)}$.

d. Conclure.

Exercice 3

Soit $n \geqslant 1$. On se donne $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ deux à deux distincts. On rappelle que

$$\det\big(\mathbf{V}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)\big) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (\lambda_j - \lambda_i) \quad \text{où} \quad \mathbf{V}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \ldots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que le déterminant d'une matrice à coefficients entiers est un nombre entier.

2. Soient $P_0, \ldots, P_{n-1} \in \mathrm{K}[X]$ des polynômes unitaires, avec $\deg P_m = m$, qu'on écrit

$$P_m = \sum_{k=1}^{m} a_{m,k} X^{k-1} + X^m, \quad m = 0, \ldots, n-1.$$

On note $\mathbf{A} \in \mathrm{M}_n(\mathrm{K})$ la matrice dont le coefficient en place (i,j) est $P_{i-1}(\lambda_j)$.

a. Montrer que

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} P_0(\lambda_1) & \cdots & P_0(\lambda_n) \\ \vdots & & \vdots \\ P_{n-1}(\lambda_1) & \ldots & P_{n-1}(\lambda_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{1,1} & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,n-1} & 1 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{V}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n).$$

b. En déduire la valeur de $\det(\mathbf{A})$.

3. On pose $H_0 = 1$ et $H_m = \frac{1}{m!} X(X-1)\cdots(X-m+1)$ pour tout $m = 1, \ldots, n-1$. En utilisant la question précédente, montrer que

$$\det(\mathbf{A}) = \left(\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (\lambda_j - \lambda_i) \right) \left(\prod_{m=0}^{n-1} m! \right)^{-1}$$

où $\mathbf{A} \in \mathrm{M}_n(\mathrm{K})$ la matrice dont le coefficient en place (i,j) est $H_{i-1}(\lambda_j)$.

4. On *admet* que $H_m(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$ pour tout $m = 0, \ldots, n-1$. Montrer en utilisant la question **1.** et la question précédente que pour tous entiers relatifs $k_1 < \cdots < k_n$ on a

$$\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \frac{k_j - k_i}{j - i} \in \mathbb{Z}.$$

5. (Hors barème) Montrer que $H_m(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$.

⋆ ⋆ ⋆