Université de Nantes Année 2024-2025
X31M020 - Algèbre linéaire et bilinéaire 2

Examen

Tous les documents et appareils électroniques sont interdits. La qualité de la rédaction sera appréciée. Le barème est donné à titre indicatif.

Questions de cours (5 points)

Soit $\mathrm{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soient E un espace vectoriel sur K de dimension finie $n \geqslant 1$, $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\beta = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.

1. Définir l'espace dual $E^\star$ de E et la base duale $\beta^\star$ de β.

2. Donner la définition de "u est diagonalisable".

Exercice I (6 points)

Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ l'espace des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 2. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ deux à deux distincts. On note

$$P_a = \frac{(X-b)(X-c)}{(a-b)(a-c)}, \quad P_b = \frac{(X-a)(X-c)}{(b-a)(b-c)} \quad \text{et} \quad P_c = \frac{(X-a)(X-b)}{(c-a)(c-b)}.$$

1. Montrer que $\rho = (P_a, P_b, P_c)$ est une base de E.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on note $\mathrm{ev}_x : E \to \mathbb{R}$ l'application définie par $\mathrm{ev}_x(P) = P(x)$.

2. Montrer que $\mathrm{ev}_x \in E^*$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et que la base duale de ρ est donnée par $\rho^* = (\mathrm{ev}_a, \mathrm{ev}_b, \mathrm{ev}_c)$.

3. Montrer que $\Phi : E \to \mathbb{R}^3,\ P \mapsto (P(a), P(b), P(c))$, est un isomorphisme.

4. Soient $P \in E$ et $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$P(a) = \alpha, P(b) = \beta \text{ et } P(c) = \gamma \quad \iff \quad P = \alpha P_a + \beta P_b + \gamma P_c.$$

5. Déterminer un polynôme P dans $\mathbb{R}_2[X]$ tel que

$$P(-1) = 1, \quad P(0) = 4 \quad \text{et} \quad P(1) = 2.$$

Exercice II (6 points)

Dans toute la suite, on se donne $A \in M_n(\mathbb{C})$ une matrice.

1. Montrer qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ tels que $B = P^{-1}AP$ est de la forme

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \star \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

2. Montrer que si A est nilpotente, alors $\mathrm{tr}(A^k) = 0$ pour tout $1 \leqslant k \leqslant n$.

3. On suppose dans cette question que $\mathrm{tr}(A^k) = 0$ pour tout $1 \leqslant k \leqslant n$. On veut montrer que $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$. On raisonne par l'absurde et on suppose que l'ensemble $\{\mu_1, \ldots, \mu_r\}$ des éléments diagonaux *non nuls* de B est non vide, où les μ_j sont deux à deux distincts. Pour $1 \leqslant s \leqslant r$ on note $m_s \in \mathbb{N}^*$ la multiplicité de μ_s, c'est-à-dire

$$m_s = \mathrm{card}\{1 \leqslant k \leqslant n \ : \ \lambda_k = \mu_s\}.$$

a) Montrer que pour tout $1 \leqslant k \leqslant n$, on a

$$\sum_{s=1}^{r} m_s \mu_s^k = 0.$$

b) On admet que la matrice

$$V(\mu_1, \ldots, \mu_r) = \begin{pmatrix} \mu_1 & \cdots & \mu_r \\ \vdots & & \vdots \\ \mu_1^r & \cdots & \mu_r^r \end{pmatrix}$$

est inversible. Montrer que $m_1 = \cdots = m_r = 0$ et en déduire une contradiction.

Indication. On pourra calculer $V(\mu_1, \ldots, \mu_r) \begin{pmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_r \end{pmatrix}$.

c) En déduire que $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$ et conclure.

Exercice III (6 points)

Dans toute la suite on pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Calculer les valeurs propres de A.

2. Déterminer les sous-espaces caractéristiques de A et des bases pour ces sous-espaces.

3. Déterminer la décomposition de Dunford de A.

4. Calculer A^k pour $k \in \mathbb{N}$.

⋆ ⋆ ⋆