Université de Nantes Année 2024-2025
X31M020 - Algèbre linéaire et bilinéaire 2

Examen

Tous les documents et appareils électroniques sont interdits. La qualité de la rédaction sera appréciée. Le barème est donné à titre indicatif.

Question de cours (5 points)

Soit $\mathrm{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soient E un espace vectoriel sur K de dimension finie $n \geqslant 1$ et $u \in \mathcal{L}(E)$.

1. Définir l'espace dual E^* de E et l'endomorphisme transposé ${}^t u$ de u.

2. Qu'est-ce qu'une forme bilinéaire sur E ? Une forme quadratique ?

Exercice (8 points)

Soit $\mathrm{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soient E un espace vectoriel sur K de dimension finie $n \geqslant 1$ et $u \in \mathcal{L}(E)$. On rappelle qu'un *hyperplan* de E est un sous-espace vectoriel de E de dimension $n - 1$. On dit qu'un hyperplan H est stable par u si $u(H) \subset H$.

1. Montrer qu'un sous-ensemble H de E est un hyperplan si et seulement si il existe $\ell \in E^*$ non nulle telle que $H = \ker \ell$.

2. Soit H un hyperplan de E et $\ell \in E^*$ telle que $\ker \ell = H$. Montrer que ℓ est un vecteur propre de ${}^t u$ si et seulement si H est stable par u.

3. On suppose $\mathrm{K} = \mathbb{R}$ et n impair. Montrer qu'il existe un hyperplan de E qui est stable par u.
Indication. On pourra commencer par montrer qu'un polynôme réel de degré impair a une racine réelle.

4. Trouver un hyperplan de $\mathbb{R}^3$ stable par l'application linéaire canoniquement associée à $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Problème (10 points)

Dans ce problème on se propose de démontrer le résultat suivant.

Théorème. *Soit* $\mathrm{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$ *et* $A \in \mathrm{M}_n(\mathrm{K})$. *Alors il existe* $P \in \mathrm{GL}_n(\mathrm{K})$ *telle que* ${}^t A = P^{-1} A P$. *Autrement dit, toute matrice est semblable à sa transposée.*

On montre le cas $\mathrm{K} = \mathbb{C}$ dans la partie I, et le cas $\mathrm{K} = \mathbb{R}$ dans la partie II. Les deux parties sont indépendantes. **La partie II du problème est facultative.**

I. Le cas $\mathrm{K} = \mathbb{C}$

On commence par supposer $\mathrm{K} = \mathbb{C}$. Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ et $u \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ l'endomorphisme canoniquement associé. On note $\Sigma = \mathrm{sp}(u) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_r\}$ le spectre de u, où les λ_j sont deux à deux distincts.

1. Montrer qu'il existe des espaces C_j, $j = 1, \ldots, r$, qui sont stables par u, tels que

$$\mathbb{C}^n = C_1 \oplus \cdots \oplus C_r,$$

et tels que pour tout $j = 1, \ldots, r$, l'endomorphisme $n_j \in \mathcal{L}(C_j)$ est nilpotent, où on a noté

$$n_j = u_j - \lambda_j \mathrm{id}_{C_j} \quad \text{avec} \quad u_j = u|_{C_j} \in \mathcal{L}(C_j).$$

Dans toute la suite, pour $j = 1, \ldots, r$, on note $\alpha_j = \dim C_j$, on fixe une base β_j de C_j, et on note $N_j \in \mathrm{M}_{\alpha_j}(\mathbb{C})$ la matrice de n_j dans la base β_j. On note $\beta = \beta_1 \oplus \cdots \oplus \beta_r$ la base de $\mathbb{C}^n$ obtenue par concaténation, et β^* sa base duale. Enfin pour $\alpha \in \mathbb{N}$ on note I_α la matrice identité de taille α.

2. Montrer que la matrice de ${}^t u$ dans la base β^* est la matrice par blocs donnée par

$$\left[{}^t u\right]_{\beta^*} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \mathrm{I}_{\alpha_1} + {}^t N_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_r \mathrm{I}_{\alpha_r} + {}^t N_r \end{pmatrix}$$

Pour $k \in \mathbb{N}$ on note $J_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_k(\mathbb{C})$.

3. Montrer que pour tout k, il existe $Q_k \in \mathrm{GL}_k(\mathbb{C})$ telle que ${}^t J_k = Q_k^{-1} J_k Q_k$.

4. En déduire que pour tout $\alpha \in \mathbb{N}$ et toute matrice nilpotente $N \in \mathrm{M}_\alpha(\mathbb{C})$, il existe $S \in \mathrm{GL}_\alpha(\mathbb{C})$ telle que ${}^t N = S^{-1} N S$.

Indication. On pourra utiliser sans démonstration le résultat vu en cours qui donne l'existence de $R \in \mathrm{GL}_\alpha(\mathbb{C})$ telle que $R^{-1} N R$ est une matrice par blocs de la forme

$$\begin{pmatrix} \boxed{J_{k_1}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \boxed{J_{k_s}} \end{pmatrix}$$

avec $k_1 + \cdots + k_s = \alpha$, puis considérer la matrice $S = R \times \begin{pmatrix} \boxed{Q_{k_1}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \boxed{Q_{k_s}} \end{pmatrix} \times {}^t R$.

5. Montrer que pour tout $j = 1, \ldots, r$, il existe $S_j \in \mathrm{GL}_{\alpha_j}(\mathbb{C})$ telle que

$${}^t(\lambda_j \mathrm{I}_{\alpha_j} + N_j) = S_j^{-1} (\lambda_j \mathrm{I}_{\alpha_j} + N_j) S_j.$$

6. Montrer qu'il existe $S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que

$$\left[{}^t u\right]_{\beta^*} = S^{-1} [u]_\beta S.$$

7. Montrer enfin qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que ${}^t A = P^{-1} A P$.

II. Le cas $\mathrm{K} = \mathbb{R}$ (Bonus, hors barème)

On suppose maintenant $\mathrm{K} = \mathbb{R}$, et on se donne $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. On admet le résultat pour $\mathrm{K} = \mathbb{C}$ montré dans la partie précédente : il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que ${}^tA = P^{-1}AP$. On cherche à trouver une autre matrice $\widetilde{P}$ à coefficients **réels**, telle que ${}^tA = \widetilde{P}^{-1}A\widetilde{P}$.

8. Soient R et Q les matrices à coefficients réels telles que

$$P = R + iQ.$$

Montrer que $P\,{}^tA = AP$ et en déduire que

$$R\,{}^tA = AR \quad \text{et} \quad Q\,{}^tA = AQ.$$

9. Pour $t \in \mathbb{R}$ on pose $f(t) = \det(R + tQ)$. Montrer que f est une fonction polynomiale et non nulle.

10. En déduire qu'il existe $\tau \in \mathbb{R}$ tel que $\widetilde{P} = R + \tau Q$ est inversible.

11. Montrer que $\widetilde{P}\,{}^tA = A\widetilde{P}$ et conclure.