Université de Nantes Année 2024-2025
X31M020 - Algèbre linéaire et bilinéaire 2

Contrôle continu 1

Tous les documents et appareils électroniques sont interdits. La qualité de la rédaction sera appréciée.

Questions de cours.

Soit $\mathrm{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soient E un espace vectoriel sur K de dimension finie $n \geqslant 1$ et $u \in \mathcal{L}(E)$.

1. Définir le polynôme minimal $\mu_u \in \mathrm{K}[X]$ de u.

2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur μ_u pour que u soit diagonalisable.

Exercice 1

Soient

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -4 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & \pi \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Donner, si elles existent, les décompositions de Dunford des matrices A, B, C et D.

Exercice 2

Soit $N \in \mathrm{M}_n(\mathrm{K})$ une matrice nilpotente d'indice n. Montrer qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(K)$ telle que

$$P^{-1}NP = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3

On note $J \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice ne comportant que des 1.

1. Calculer J^2 et déterminer un polynôme annulateur de J.

2. Déterminer le polynôme minimal de J.

3. Calculer J^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

4. Calculer le polynôme caractéristique de J.

Exercice 4

Soit E un espace vectoriel complexe de dimension n ($n > 2$) et f un endomorphisme de E distinct de Id_E, vérifiant $f^2 - 2f + \mathrm{Id}_E = 0$.

1. Montrer que $\mathrm{Im}(f - \mathrm{Id}_E) \subset \ker(f - \mathrm{Id}_E)$.

2. Démontrer que 1 est la seule valeur propre de f.

3. Calculer le déterminant de f.

4. Justifier que f n'est pas diagonalisable.

5. Déterminer le polynôme caractéristique et le polynôme minimal de f.

6. On suppose ici que $n = 3$. Déterminer $\dim \ker(f - \mathrm{Id}_E)$. En déduire qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

7. Calculer A^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

⋆ ⋆ ⋆