Devoir maison : corrigé

Nota Bene. Si vous le souhaitez (c'est encouragé), vous pouvez travailler en groupe. Un groupe peut contenir jusqu'à trois élèves.

Soit $\mathrm{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $n \geqslant 1$ un entier. Pour toute matrice $A \in \mathrm{M}_n(\mathrm{K})$, on note

$$|||A||| = \sup_{X \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathrm{K}) \setminus \{0\}} \frac{\|AX\|}{\|X\|}.$$

Ici la norme $\|\cdot\|$ choisie sur l'espace $\mathrm{M}_{n,1}(\mathrm{K})$ des vecteurs colonnes est la norme euclidienne,

$$\|X\| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |x_j|^2} \quad \text{pour tout vecteur colonne} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathrm{K}).$$

I — Préliminaires

1. Montrer que $|||\cdot|||$ est une norme sur $\mathrm{M}_n(\mathrm{K})$.

Solution. Déjà, remarquons que pour tout $A = (a_{ij}) \in \mathrm{M}_n(\mathrm{K})$, $|||A|||$ est bien défini. En effet, pour tout $k = 1, \ldots, n$ et $X = {}^t(x_1, \ldots, x_n) \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathrm{K})$, on a

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} |(AX)_k|^2 = \sum_{k=1}^{n} \left| \sum_{\ell=1}^{n} a_{k,\ell} x_\ell \right|^2 &\leqslant \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{\ell=1}^{n} |a_{k,\ell}||x_\ell| \right)^2 \\ &\leqslant \|X\|_\infty^2 \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{\ell=1}^{n} |a_{k,\ell}| \right)^2\end{aligned}$$

où $\|X\|_\infty = \sup_i |x_i|$. Notons que $\|X\|^2 = \sum_i |x_i|^2 \geqslant \|X\|_\infty^2$, de sorte qu'on obtient

$$\|AX\| \leqslant C\|X\| \quad \text{où} \quad C = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{\ell=1}^{n} |a_{k,\ell}| \right)^2}.$$

On en déduit immédiatement que

$$|||A||| = \sup_{X \neq 0} \frac{\|AX\|}{\|X\|} \leqslant C < \infty.$$

Vérifions à présent que $|||\cdot|||$ est une norme. La positivité, l'homogénéité et l'inégalité triangulaire découlent directement du fait que $\|\cdot\|$ est une norme. Il reste à vérifier la séparation : soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathrm{K})$ telle que $|||A||| = 0$. Alors par définition de $|||A|||$ on a $AX = 0$ pour tout $X \neq 0$. Il suit que l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à A est nul, donc A est la matrice nulle.

2. Montrer que c'est une norme d'algèbre, dans le sens où

$$|||AB||| \leqslant |||A||| \cdot |||B|||, \quad A, B \in \mathrm{M}_n(\mathrm{K}).$$

Solution. Il suit de la définition de la norme triple que pour tous $A \in \mathrm{M}_n(\mathrm{K})$ et $X \neq 0$ on a $\|AX\| \leqslant |||A|||\|X\|$ (c'est aussi vrai si $X = 0$). Ainsi si A, B sont deux matrices carrées de taille n et $X \neq 0$, on a

$$\|ABX\| \leqslant |||A||| \cdot \|BX\| \leqslant |||A||| \cdot |||B||| \cdot \|X\|.$$

Il suit immédiatement que $|||AB||| \leqslant |||A||| \cdot |||B|||$.

3. En déduire que pour toute matrice A, la suite $(A_N)_{N\in\mathbb{N}}$ définie par

$$A_N = \sum_{\ell=0}^{N} \frac{A^\ell}{\ell!}$$

est une suite de Cauchy dans $\mathrm{M}_n(\mathrm{K})$.

Solution. Soit $\varepsilon > 0$ et $p, q \in \mathbb{N}$ avec $p \leqslant q$. On a

$$|||A_q - A_p||| = \left|\left|\left| \sum_{\ell=p}^{q} \frac{A^\ell}{\ell} \right|\right|\right| \leqslant \sum_{\ell=p}^{q} \frac{|||A|||^\ell}{\ell!}.$$

La série $\sum_\ell |||A|||^\ell/\ell!$ converge vers $\exp|||A|||$. En particulier la suite des sommes partielles $\left(\sum_{\ell=0}^{N} |||A|||^\ell/\ell!\right)_{N\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans K, donc il existe $N \geqslant 0$ tel que pour tous $p, q \geqslant N$ avec $q \geqslant p$ on a

$$\sum_{\ell=p}^{q} \frac{|||A|||^\ell}{\ell!} < \varepsilon.$$

Il suit que $|||A_q - A_p||| < \varepsilon$ pour tous $p, q \geqslant N$, donc (A_N) est une suite de Cauchy dans $\mathrm{M}_n(\mathrm{K})$.

Dans toute la suite, on notera $\exp A$ ou encore e^A la matrice limite

$$\exp A = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{A^\ell}{\ell!} = \lim_{N\to\infty} A_N.$$

II — Propriétés de l'exponentielle de matrice

4. Montrer que si A et B commutent, alors $e^{A+B} = e^A e^B$.

Solution. Comme A et B commutent, on peut appliquer la formule du binôme de Newton et pour tout $m \geqslant 0$ on a

$$\frac{(A+B)^m}{m!} = \sum_{k=0}^{m} \frac{A^k}{k!} \frac{B^{m-k}}{(m-k)!}.$$

Soient $A_N = \sum_{k=0}^{N} A^\ell/\ell!$ et $B_N = \sum_{\ell=0}^{N} B^\ell/\ell!$. Alors

$$A_N B_N = \sum_{0\leqslant k,\ell\leqslant N} \frac{A^k}{k!} \frac{B^\ell}{\ell!}. \tag{1}$$

D'autre part posons $C = A + B$ et $C_N = \sum_{m=0}^{N} (A+B)^m/m!$. Alors

$$C_N = \sum_{m=0}^{N} \sum_{k=0}^{m} \frac{A^k}{k!} \frac{B^{m-k}}{(m-k)!} = \sum_{(k,\ell)\in P(N)} \frac{A^k}{k!} \frac{B^\ell}{\ell!} \tag{2}$$

où $P(N)$ est l'ensemble des couples (k, ℓ) avec $0 \leqslant k, \ell \leqslant N$ et vérifiant $k + \ell \leqslant N$. On définit aussi

$$Q(N) = \{0, \ldots, N\}^2 \setminus P(N) = \{(k, \ell) \in \{0, \ldots, N\}^2 \ : \ k + \ell > N\}.$$

Alors les équations (1) et (2) impliquent

$$A_N B_N - C_N = \sum_{(k,\ell)\in Q(N)} \frac{A^k}{k!} \frac{B^\ell}{\ell!}.$$

Notons $\alpha = \max(|||A|||, |||B|||)$. Alors pour tout $(k, \ell) \in Q(N)$, on a $k + \ell \leqslant 2N$ et donc $|||A^k B^\ell||| \leqslant \alpha^{k+\ell} \leqslant \alpha^{2N}$. De plus, on a $k \geqslant N/2$ ou $\ell \geqslant N/2$ donc $k!\,\ell! \geqslant \lfloor N/2 \rfloor!$. Ainsi on a montré

$$\left|\left|\left|\frac{A^k}{k!}\frac{B^\ell}{\ell!}\right|\right|\right| \leqslant \frac{\alpha^{2N}}{\lfloor N/2 \rfloor!}$$

Comme $\operatorname{Card} Q(N) \leqslant N^2$, on obtient finalement

$$|||A_N B_N - C_N||| \leqslant \frac{N^2 \alpha^{2N}}{\lfloor N/2 \rfloor!}.$$

En particulier,

$$|||A_{2N} B_{2N} - C_{2N}||| \leqslant \frac{(2N)^2(\alpha^4)^N}{N!} = 2^2(\alpha^4)^2 \frac{N^2}{N(N-1)} \frac{(\alpha^4)^{N-2}}{(N-2)!} \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

En effet $(\alpha^4)^\ell/\ell!$ est le terme général de la série définissant $\exp(\alpha^4)$, donc tend vers zéro quand $\ell \to \infty$. Maintenant, on remarque que $A_{2N}B_{2N} \to \exp(A)\exp(B)$ et $C_{2N} \to \exp(C)$ quand $N \to \infty$, donc on obtient bien le résultat voulu.

5. En déduire que pour $A \in \mathrm{M}_n(\mathrm{K})$, la matrice $\exp A$ est inversible et calculer son inverse.

Solution. Comme A et $-A$ commutent, on a par la question précédente

$$e^A e^{-A} = e^{-A} e^A = e^{A-A} = e^0 = I_n.$$

Ainsi e^A est inversible d'inverse e^{-A}.

6. Montrer que pour si $A \in \mathrm{M}_n(\mathrm{K})$ et $P \in \mathrm{GL}_n(\mathrm{K})$ alors

$$\exp(P^{-1}AP) = P^{-1}\exp(A)P.$$

*Solution. Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathrm{K})$. On considère la suite (A_N) de la question **3.**, ainsi la suite (B_N) obtenue en remplaçant A par $P^{-1}AP$. On a*

$$B_N = \sum_{\ell=0}^{N} \frac{(P^{-1}AP)^\ell}{\ell!} = \sum_{\ell=0}^{N} \frac{P^{-1}A^\ell P}{\ell!} = P^{-1}\left(\sum_{\ell=0}^{N}\frac{A^\ell}{\ell!}\right)P = P^{-1}A_N P.$$

L'application $A \mapsto P^{-1}AP$ est continue $\mathrm{M}_n(\mathrm{K}) \to \mathrm{M}_n(\mathrm{K})$, on obtient en faisant tendre N vers $+\infty$,

$$\exp(P^{-1}AP) = \lim_N B_N = \lim_N P^{-1}A_N P = P^{-1}\exp(A)P.$$

7. Montrer que pour toute $A \in \mathrm{M}_n(\mathrm{K})$ on a

$$\det \exp A = \exp \operatorname{tr} A.$$

Indication. On pourra le montrer pour les matrices complexes triangulaires supérieures et en déduire le cas général.

Solution. Soit $T \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice triangulaire supérieure. On note $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ses coefficients diagonaux. Une récurrence immédiate donne que pour tout $\ell \in \mathbb{N}$, la matrice $T^\ell/\ell!$ est triangulaire supérieure et ses coefficients diagonaux sont donnés par $\lambda_1^\ell/\ell!, \dots, \lambda_n^\ell/\ell!$. Puisque que pour tout $j = 1, \dots, n$ on a

$$\exp \lambda_j = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{\lambda_j^\ell}{\ell!}$$

on obtient que $\exp T$ est triangulaire supérieure et que ses coefficients diagonaux sont donnés par $\exp \lambda_1, \dots, \exp \lambda_n$. Il suit que

$$\det \exp T = \prod_{j=1}^{n} \exp \lambda_j = \exp \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = \exp \operatorname{tr} T.$$

*Soit maintenant $A \in \mathrm{M}_n(\mathrm{K})$ quelconque. On a $\mathrm{K} \subset \mathbb{C}$ et le polynôme caractéristique de A est scindé sur $\mathbb{C}$. Par suite A est trigonalisable sur le corps $\mathbb{C}$, et il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $T = P^{-1}AP$ soit triangulaire supérieure. Par ce qui précède on a $\det \exp T = \exp \operatorname{tr} T$. Comme A et T sont semblables, on a aussi $\operatorname{tr} T = \operatorname{tr} A$. D'autre part $\exp A$ et $\exp T$ sont aussi semblables par la question **6.**, donc $\det \exp A = \det \exp T$. Finalement*

$$\det \exp A = \det \exp T = \exp \operatorname{tr} T = \exp \operatorname{tr} A.$$

On dit qu'une application $\mathbb{R} \to \mathrm{M}_n(\mathrm{K})$, $t \mapsto A(t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ si pour tous $1 \leqslant i, j \leqslant n$, le coefficient $A(t)_{ij}$ en place (i, j) de $A(t)$ dépend de manière $\mathscr{C}^1$ de t.

8. Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathrm{K})$. Montrer que l'application

$$\mathbb{R} \to \mathrm{M}_n(\mathrm{K}), \quad t \mapsto \exp(tA)$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ et qu'on a $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \exp(tA) = A \exp(tA)$.

Solution. Soient $1 \leqslant i, j \leqslant n$. On veut montrer que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathrm{K}$ est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, où $f(t)$ est le coefficient en place (i, j) de e^{tA} pour tout $t \in \mathbb{R}$. On a

$$f(t) = \sum_{\ell=0}^{\infty} f_\ell(t) \quad \text{où} \quad f_\ell(t) = \frac{\left((tA)^\ell\right)_{ij}}{\ell!} = \frac{(A^\ell)_{ij}}{\ell!} t^\ell, \quad \ell \geqslant 0.$$

Méthode 1 (dérivation terme à terme). *On applique le théorème de dérivation sous le signe somme, et pour cela on va montrer que pour tout intervalle borné du type $I_r = [-r, r]$ avec $r > 0$, on a*

$$\sum_\ell \|f_\ell\|_{\infty, I_r} < \infty \quad \text{et} \quad \sum_\ell \|f'_\ell\|_{\infty, I_r} < \infty \tag{3}$$

où pour toute fonction g continue sur $\mathbb{R}$ on a noté $\|g\|_{\infty, I_r} = \sup_{I_r} |g|$. On veut donc majorer les fonctions $|f_\ell|$ et $|f'_\ell|$ uniformément sur I_r.

Notons que pour toute matrice $B = (b_{ij}) \in \mathrm{M}_n(\mathrm{K})$, on a $|b_{ij}| \leqslant |||B|||$. En effet, si $e_j \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathrm{K})$ est le vecteur colonne dont toutes les entrées sont nulles sauf la j^e qui vaut 1, le vecteur Be_j est la j^e colonne de B. Ainsi

$$|b_{ij}| \leqslant \|Be_j\| \leqslant |||B||| \cdot \|e_j\| = |||B|||.$$

On obtient donc pour tout $\ell \in \mathbb{N}$

$$|(A^\ell)_{ij}| \leqslant \left|\left|\left| A^\ell \right|\right|\right| \leqslant |||A|||^\ell.$$

Fixons $r > 0$. On a pour tout $\ell \in \mathbb{N}$

$$|f_\ell(t)| = \left| \frac{(A^\ell)_{ij}}{\ell!} t^\ell \right| \leqslant \frac{|||A|||^\ell}{\ell!} |t|^\ell \leqslant \frac{(r|||A|||)^\ell}{\ell!}, \quad |t| \leqslant r. \tag{4}$$

Les fonctions f_ℓ sont toutes de classe $\mathscr{C}^1$ (car polynomiales). On a $f'_0 = 0$ et pour tout $\ell \geqslant 1$,

$$|f'_\ell(t)| = \left| \frac{(A^\ell)_{ij}}{(\ell-1)!} t^{\ell-1} \right| \leqslant |||A||| \frac{(r|||A|||)^{\ell-1}}{(\ell-1)!}, \quad |t| \leqslant r. \tag{5}$$

Comme la série de terme général $(r|||A|||)^\ell/\ell!$ converge, on en déduit (3). Le théorème de dérivation sous le signe somme s'applique et f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[-r, r]$ et f' coïncide avec la fonction somme $\sum_{\ell \geqslant 0} f'_\ell$. Ceci étant vrai pour tout $r > 0$, on obtient que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ avec

$$f'(t) = \sum_{\ell=0}^{\infty} f'_\ell(t) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(A^{\ell+1})_{ij}}{\ell!} t^\ell. \tag{6}$$

Méthode 2 (avec les séries entières). *On voit que $f(t) = \sum_{\ell \geqslant 0} \alpha_\ell t^\ell$ est la fonction somme de la série entière dont le terme général est $\alpha_\ell = (A^\ell)_{ij}/\ell!$. Comme dans la méthode 1, on a $|\alpha_\ell| r^\ell \leqslant (r|||A|||)^\ell/\ell!$, donc la suite $(\alpha_\ell r^\ell)$ est bornée pour tout $r > 0$. Il suit que la série entière $\sum_\ell \alpha_\ell t^\ell$ a un rayon de convergence infini, donc f est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et la relation (6) est satisfaite.*

Soit $A_N(t) = \sum_{\ell=0}^N (tA)^\ell/\ell!$. Le coefficient en place (i,j) de $AA_N(t)$ est donné par

$$(AA_N)_{ij} = \sum_{\ell=0}^N \frac{(A^{\ell+1})_{ij} t^\ell}{\ell!}.$$

En faisant $N \to \infty$ on obtient que le coefficient en place (i,j) de $A\exp(tA)$ est donné par $f'(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(e^{tA}\right)_{ij}$. Comme c'est vrai pour tout (i,j), on obtient le résultat voulu.

9. Montrer que pour tous $A \in \mathrm{M}_n(\mathrm{K})$ et $X_0 \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathrm{K})$, le système

$$\begin{cases} X'(t) = AX(t) \\ X(0) = X_0 \end{cases}$$

admet une unique solution $X \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathrm{M}_{n,1}(\mathrm{K}))$ qui est donnée par

$$X(t) = \exp(tA)X_0, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Solution. La question précédente donne immédiatement que l'application $t \mapsto \exp(tA)X_0$ est solution du système. Nous allons montrer que c'est la seule. Déjà, on remarque que puisque $AA_N(t) = A_N(t)A$ (où $A_N(t)$ est définie dans la question précédente), on a

$$A\exp(tA) = \exp(tA)A$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$. On se donne $X : t \mapsto X(t)$ une solution du système et on pose

$$\widetilde{X}(t) = e^{-tA}X(t).$$

Puisque $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\exp(-tA)) = -A\exp(-tA) = -\exp(-tA)A$, on obtient

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\widetilde{X}(t) = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e^{-tA}\right)X(t) + e^{-tA}X'(t) = \left(-e^{-tA}A\right)X(t) + e^{-tA}AX(t) = 0. \tag{7}$$

*Ainsi $t \mapsto \widetilde{X}(t)$ est constante et $\widetilde{X}(t) = \widetilde{X}(0) = X_0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. On multipliant par e^{tA} on obtient, par la question **5.**,*

$$X(t) = e^{tA}\widetilde{X}(t) = e^{tA}X_0,$$

donc $t \mapsto e^{tA}X_0$ est l'unique solution du système.

Remarque. *Pour obtenir (7), on a utilisé le fait suivant : si $A(t)$ et $B(t)$ sont des matrices de tailles respectives $m \times n$ et $n \times p$, qui dépendent de manière $\mathscr{C}^1$ de t, alors le produit $C(t) = A(t)B(t)$ est aussi $\mathscr{C}^1$ en t et*

$$C'(t) = A'(t)B(t) + A(t)B'(t). \tag{8}$$

En effet, soient $1 \leqslant i \leqslant m$ et $1 \leqslant j \leqslant p$. Le coefficient en place (i,j) de $C(t)$ est donné par

$$C(t)_{ij} = \sum_{k=1}^n A(t)_{ik}B(t)_{kj}.$$

Comme les coefficients de $A(t)$ et $B(t)$ sont de classe $\mathscr{C}^1$, on obtient que $t \mapsto C(t)_{ij}$ est aussi de classe $\mathscr{C}^1$ avec

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}C(t)_{ij} = \sum_{k=1}^n A'(t)_{ik}B(t)_{kj} + \sum_{k=1}^n A(t)_{ik}B'(t)_{kj} = (A'(t)B(t) + A(t)B'(t))_{ij}.$$

Ceci est exactement l'équation (8).

III — Méthode pour calculer l'exponentielle d'une matrice

10. Montrer que si $A = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ est une matrice diagonale, avec $\lambda_j \in \mathrm{K}$ pour tout $j = 1, \ldots, n$, alors
$$\exp A = \mathrm{diag}(e^{\lambda_1}, \ldots, e^{\lambda_n}).$$

Solution. Pour tout ℓ on a $A^\ell/\ell! = \mathrm{diag}(\lambda_1^\ell/\ell!, \ldots, \lambda_n^\ell/\ell!)$. On en déduit immédiatement le résultat.

11. Soit $\mathrm{Q}_n = \sum_{\ell=0}^{n} \frac{X^\ell}{\ell!} \in \mathrm{K}[X]$. Montrer que pour toute matrice nilpotente $N \in \mathrm{M}_n(\mathrm{K})$ on a
$$\exp N = \mathrm{Q}_n(N).$$

Solution. En effet, soit N nilpotente, donc il existe p tel que $N^p = 0$. Comme N est de taille n, on a vu en cours que $N^n = 0$. Démontrons le rapidement. Le polynôme minimal μ_N de N divise X^p, donc $\mu_N = X^q$ avec $q \leqslant n$ puisqu'il est de degré au plus n. Ainsi $N^n = N^{n-q}N^q = 0$. On obtient alors $N^\ell = 0$ pour tout $\ell \geqslant n$. Ainsi, on obtient
$$\exp N = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{N^\ell}{\ell!} = \sum_{\ell=0}^{n} \frac{N^\ell}{\ell!} = Q_n(N).$$

***Remarque**. En fait on a même $Q_{n-1}(N) = \exp N$ puisque $N^n = 0$.*

12. Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathrm{K})$ telle que son polynôme caractéristique χ_A soit scindé. Montrer qu'il existe une matrice diagonale Δ, une matrice nilpotente N et une matrice inversible $P \in \mathrm{GL}_n(\mathrm{K})$ telles que
$$\exp(tA) = P^{-1} \exp(t\Delta) P\, \mathrm{Q}_n(tN), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Indication. On pourra utiliser la décomposition de Dunford $A = D + N$ de A et écrire $D = P^{-1}\Delta P$ avec Δ diagonale.

*Solution. Soit $t \in \mathbb{R}$. Le polynôme caractéristique de A étant scindé, A admet une décomposition de Dunford, que l'on note $A = D + N$. La matrice D est diagonalisable, N est nilpotente, et $DN = ND$. Comme D et N commutent, on a par la question **4.**,*
$$\exp(tA) = \exp(t(D + N)) = \exp(tD) \exp(tN).$$

*La matrice D est diagonalisable donc il existe une matrice diagonale Δ et $P \in \mathrm{GL}_n(\mathrm{K})$ telles que $D = P^{-1}\Delta P$. Par la question **6.** on obtient $\exp(tD) = P^{-1} \exp(t\Delta)P$. Enfin comme tN est nilpotente on a $\exp(tN) = Q_n(tN)$ par la question précédente, et on obtient bien*
$$\exp(tA) = P^{-1} \exp(t\Delta)PQ_n(tN), \quad t \in \mathbb{R}.$$

IV — Application

13. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. En utilisant les questions **9** et **12**, déterminer les solutions $x(t), y(t)$ et $z(t)$ au système
$$x'(t) = x(t) - y(t), \quad y'(t) = x(t) - z(t), \quad z'(t) = -x(t) + 2z(t), \quad t \in \mathbb{R},$$
avec $x(0) = a,\ y(0) = b$ et $z(0) = c$.

Solution. Soit $X_0 = {}^t(a, b, c) \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On cherche les solutions
$$t \mapsto X(t) = {}^t\left(x(t), y(t), z(t)\right)$$

au système linéaire

$$\left\{\begin{array}{l} X'(t) = AX(t) \\ X(0) = X_0. \end{array}\right. \qquad \text{où} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R}).$$

On calcule $\chi_A(X) = (1-X)^3$*. Ainsi* χ_A *est scindé sur* $\mathbb{R}$ *et sa seule valeur propre de* A *est* 1*. Soit* $A = D + N$ *la décomposition de Dunford de* A*. La matrice* D *est diagonalisable et n'a que* 1 *comme valeur propre ; c'est donc nécessairement la matrice identité,* $D = \mathrm{I}_3$*. On a donc* $\exp(tD) = \exp(t\mathrm{I}_3) = e^t\,\mathrm{I}_3$*. D'autre part*

$$N = A - D = A - \mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a $N^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ *et* $N^3 = 0$ *(ce qu'on savait déjà par le théorème de Cayley–Hamilton), de sorte que*

$$Q_3(tN) = \mathrm{I}_3 + tN + \frac{t^2N^2}{2} = \begin{pmatrix} 1 - t^2/2 & -t + t^2/2 & t^2/2 \\ t & 1-t & -t \\ -t - t^2/2 & t^2/2 & 1 + t + t^2/2 \end{pmatrix}$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$*. Finalement par la question précédente on a*

$$\exp(tA) = \exp(t)Q_3(tN)$$

et on en déduit que pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \exp(t)Q_3(tN)\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

Ceci donne enfin, pour tout réel t*,*

$$\begin{aligned} x(t) &= e^t\Big[a\left(1 - t^2/2\right) + b\left(-t + t^2/2\right) + ct^2/2\Big] \ ; \\ y(t) &= e^t\Big[at + b(1-t) - ct\Big] \ ; \\ z(t) &= e^t\Big[a\left(-t - t^2/2\right) + bt^2/2 + c\left(1 + t + t^2/2\right)\Big]. \end{aligned}$$